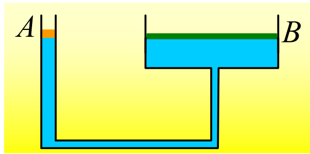
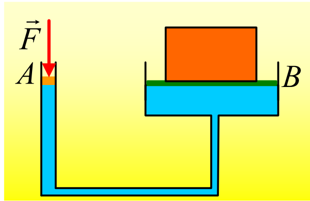
Ένας υδραυλικός ανυψωτήρας.





Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται ένας υδραυλικός ανυψωτήρας, με χρήση νερού, όπου τα δύο έμβολα Α και Β, κυλινδρικού σχήματος, έχουν διατομές A_1=2cm^2 και A_2=40cm^2 αντίστοιχα και ισορροπούν στο ίδιο ύψος. Το έμβολο Α έχει βάρος w_1=10N.

i) Ποιο το βάρος του εμβόλου Β;

ii) Τοποθετούμε πάνω στο έμβολο Β, ένα σώμα Σ μάζας 200kg. Πόση κατακόρυφη δύναμη F πρέπει να ασκήσουμε στο Α έμβολο, ώστε να μην μετακινηθούν τα έμβολα;

iii) Αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F μετακινούμε το Α έμβολο κατά h=80cm, φέρνοντάς το να ισορροπεί σε μια νέα θέση.

α) Πόσο θα ανέβει το σώμα Σ;

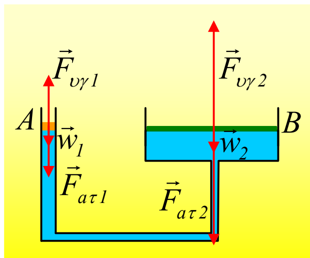
β) Ποια η τελική τιμή της δύναμης F_1;

γ) Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η ατμόσφαιρα, επί του συστήματος.

δ) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3, η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}$=10^{5}N/m^2 και g=10m/s^2, ενώ οι κινήσεις των εμβόλων γίνονται χωρίς τριβές.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε έμβολο, όπου $F_{υγ}$ οι δυνάμεις από το υγρό. Από την ισορροπία των εμβόλων έχουμε:

$$\Sigma F_1=0 \rightarrow F_{υγ1}=F_{ατ1}+w_1 \rightarrow p\cdot A_1=p_{ατ}\cdot A_1+w_1 \rightarrow p = p_{ατ} + \frac{w_1}{A_1} \quad (1)$$

$$\Sigma F_2=0 \rightarrow F_{υγ2}=F_{ατ2}+w_2 \rightarrow p\cdot A_2=p_{ατ}\cdot A_2+w_2 \rightarrow p = p_{ατ} + \frac{w_2}{A_2} \quad (2)$$

Όπου p η πίεση στις κάτω επιφάνειες των δύο εμβόλων, κοινή και στα δύο έμβολα, αφού οι δυο επιφάνειες του υγρού βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{w_1}{A_1} = \frac{w_2}{A_2} \quad (3) \rightarrow w_2 = w_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \rightarrow$$

$$w_2 = 10N\frac{40cm^2}{2cm^2}N = 200N$$

ii) Η τοποθέτηση του σώματος Σ πάνω στο έμβολο, μετατρέπει τις παραπάνω εξισώσεις (1) και (2) ισοδύναμα στις σχέσεις $p = p_{ατ} + \frac{F + w_1}{A_1}$ και $p = p_{ατ} + \frac{w_2 + w_Σ}{A_2}$, από όπου:

$$\frac{F + w_1}{A_1} = \frac{w_2 + w_Σ}{A_2} \rightarrow F = (w_2 + Mg) \cdot \frac{A_1}{A_2} - w_1 \ (4)$$

$$F = (200N + 2.000N) \cdot \frac{2cm^2}{40cm^2} - 10N = 100N$$

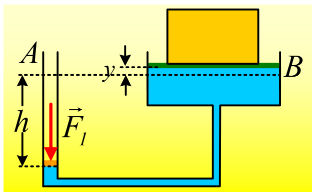
Σημείωση:

Η σχέση (4) γράφεται:

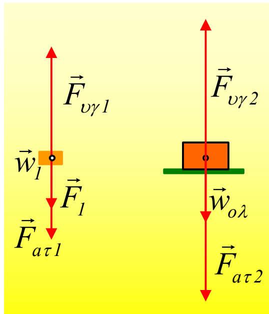
$$F = w_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} + Mg \cdot \frac{A_1}{A_2} - w_1 \xrightarrow{(3)} F = w_1 + Mg \cdot \frac{A_1}{A_2} - w_1 = Mg \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

σχέση, που δεν είναι άλλη από την (3), αφού ασκώντας επιπλέον δύναμη F, προκαλούμε αύξηση πίεσης κατά $\frac{F}{A_1}$, ίση σε όλα τα σημεία του υγρού, με βάση την αρχή του Pascal, συνεπώς και ίση με $\frac{Mg}{A_2}$, ή με άλλα λόγια, βάρος ίσο με Mg=2.000N στο ένα σκέλος, εξισορροπείται από δύναμη F=100N στο άλλο.

iii) Στο διπλανό σχήμα το έμβολο Α έχει κατέλθει κατά h =80cm, αλλά τότε το έμβολο Β έχει ανέβει κατά y, ο όγκος του νερού μειώθηκε στο ένα σκέλος, αφού μεταφέρθηκε στο δεξιό σκέλος.



σχ.1



α) Έστω V_1 η μείωση του όγκου στο αριστερό σκέλος και V_2 η αύξηση του όγκου στο δεξιό. Αφού το νερό θεωρείται πρακτικά ασυμπίεστο υγρό, $V_1=V_2$.

$$A_1 \cdot h = A_2 \cdot y \rightarrow y = h \cdot \frac{A_1}{A_2} = 80cm \cdot \frac{2cm^2}{40cm^2} = 4cm$$

β) Στο δεύτερο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο Α έμβολο και δίπλα στο «σύστημα» έμβολο Β-σώμα Σ. Από την ισορροπία τους έχουμε:

$$ΣF_1=0 \rightarrow F_{υγ1}=F_1+F_{ατ1}+w_1 \rightarrow p_1 \cdot A_1=F_1+p_{ατ}\cdot A_1+w_1 \rightarrow p_1 = p_{ατ} + \frac{F_1 + w_1}{A_1} \ (1α)$$

$$ΣF_2=0 \rightarrow F_{υγ2}=F_{ατ2}+w_{ολ} \rightarrow p_2\cdot A_2=p_{ατ}\cdot A_2+w_{ολ} \rightarrow p_2 = p_{ατ} + \frac{w_{ολ}}{A_2} \ (2α)$$

Όπου p_1 η πίεση σε ένα σημείο στην κάτω πλευρά του εμβόλου Α και p_2 η αντίστοιχη σε σημείο στην κάτω πλευρά του εμβόλου Β. Όμως με βάση το σχήμα 1:

$$p_1=p_2+\rho g(h+y) \ (5)$$

Με αντικατάσταση της (5) στην ($1^α$) και αφαίρεση κατά μέλη με την ($2^α$) παίρνουμε:

$$p_2+\rho g(h+y)-p_2=p_{\alpha\tau}+\frac{F_1+w_1}{A_1}-p_{\alpha\tau}-\frac{w_{o\lambda}}{A_2}\rightarrow$$

$$F_1=\rho g(h+y)A_1+(w_2+Mg)\frac{A_1}{A_2}-w_1\rightarrow$$

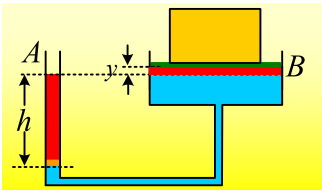
$$F_1=1.000\cdot 10\cdot(0,8+0,04)\cdot 2\cdot 10^{-4}N+(200N+2.000N)\frac{2cm^2}{40cm^2}-10N=101,68N$$

γ) Το έργο που παράγει η ατμόσφαιρα, πάνω στο σύστημα, είναι το άθροισμα των έργων των δυνάμεων $F_{\alpha\tau/1}$ και $F_{\alpha\tau/2}$:

$$W_{\alpha\tau}=F_{\alpha\tau 1}\cdot h-F_{\alpha\tau 2}\cdot y=p_{\alpha\tau}A_1\cdot h-p_{\alpha\tau}A_2\cdot y=p_{\alpha\tau}\left(A_1\cdot h-A_2\cdot y\right)=0$$

Αφού $A_1\cdot h=A_2\cdot y$ ($V_1=V_2$, ερώτημα iii).

δ) Έστω το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την τελική θέση του Α εμβόλου ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Αν m είναι η μάζα του υγρού της στήλης ύψους h (με κόκκινο χρώμα στο σχήμα), τότε η αρχική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με:



$$U_{\alpha\rho\chi}=mg\cdot ½\,h+m_1gh+m_2gh+Mgh+U_{\upsilon\gamma}$$

Όπου $U_{\upsilon\gamma}$ η δυναμική ενέργεια της υπόλοιπης ποσότητας του υγρού (με μπλε χρώμα στο σχήμα).

Η τελική δυναμική ενέργεια του συστήματος, μετά τη μεταφορά της μάζας m του υγρού από το αριστερό σκέλος στο δεξιό, είναι:

$$U_{\tau\varepsilon\lambda}=mg(h+½\,y)+m_2g(h+y)+Mg(h+y)+U_{\upsilon\gamma}$$

Κατά συνέπεια η ενέργεια του συστήματος αυξήθηκε κατά:

$$\Delta U=U_{\tau\varepsilon\lambda}-U_{\alpha\rho\chi}=mg(h+½\,y)+m_2g(h+y)+Mg(h+y)+U_{\upsilon\gamma}-(mg\cdot ½\,h+m_1gh+m_2gh+Mgh+U_{\upsilon\gamma})\rightarrow$$

$$U_{\tau\varepsilon\lambda}-U_{\alpha\rho\chi}=mg(½\,h+½\,y)+(m_2+M)gy-m_1gh\rightarrow$$

$$\Delta U=½\,\rho gA_1\cdot h^2+½\,\rho gA_1h\cdot y+w_2y+Mgy-w_1h\rightarrow$$

$$\Delta U=½\,\rho gA_1\cdot h(h+y)+w_2y+Mgy-w_1h$$

Όπου $½\,\rho gA_1\cdot h(h+y)$ η αύξηση της δυναμικής ενέργειας του νερού που μεταφέρθηκε από το αριστερό στο δεξιά σκέλος, w_2y η αύξηση της δυναμικής ενέργειας του Β εμβόλου, Mgy η αύξηση της δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ και w_1h η μείωση της δυναμικής ενέργειας του εμβόλου Α.

$$\Delta U=½\,1.000\cdot 10\cdot 2\cdot 10^{-4}\cdot 0,8(0,8+0,04)J+200\cdot 0,04J+200\cdot 10\cdot 0,04J-10\cdot 0,8J=80,672J.$$

Αλλά με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας, αφού αυξήθηκε η ενέργεια του συστήματος κατά 80,672J, το σύστημα πήρε από το περιβάλλον του, ισοδύναμο ποσό ενέργειας. Ναι, αλλά από την ατμόσφαιρα δεν πήρε ενέργεια (προηγούμενο ερώτημα), συνεπώς την ενέργεια αυτή πήρε μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης F που ασκήθηκε στο έμβολο. Συνεπώς:

$$W_F=80,672J.$$

dmargaris@gmail.com