

Μια σύνθετη ταλάντωση και φάσεις.

Ένα σώμα μάζας 0,2kg έχει εξίσωση κίνησης, γύρω από μια θέση $y=0$:

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) + 0,1 \cdot \eta\mu(3\pi t) \quad (\text{μονάδες στο S.I.}).$$

- i) Υπολογίστε το «πλάτος» και την απομάκρυνση της κίνησης για $t=0$. Ποια είναι η αρχική φάση της απομάκρυνσης;
- ii) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του «πλάτους» και ποια χρονική στιγμή t_1 το πλάτος μεγιστοποιείται για πρώτη φορά;
- iii) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή $t_2=2s$.
- iv) Να βρεθούν η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος την παραπάνω στιγμή.

Δίνεται $2\eta\mu\frac{\pi}{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,5$ και $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

- i) Για $t=0$ έχουμε από την εξίσωση που μας δόθηκε:

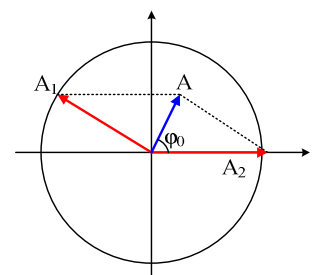
$$y = 0,1 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + 0,1 \cdot \eta\mu(3\pi) = 0,1 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 0,1 \cdot \eta\mu(0) = 0,05m$$

Εξάλλου η κίνηση του σώματος θα μπορούσε να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων με εξισώσεις:

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu(3\pi t) \quad (\text{μονάδες στο S.I.}).$$

Αλλά τότε τη στιγμή $t=0$, θα μπορούσαμε να «αναπαραστήσουμε» τις δύο ταλαντώσεις με τα διανύσματα A_1 και A_2 του διπλανού σχήματος, όπου η γωνία μεταξύ τους, ίση με τη διαφορά φάσης των δύο απομακρύνσεων, είναι:

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{5\pi}{6} - 3\pi = \frac{5\pi}{6}.$$



Για το πλάτος έχουμε:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}} = A_1\sqrt{2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}} = 0,1\sqrt{2 - \sqrt{3}}m \approx 0,05m$$

Ενώ η αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με $\varphi_0 = \frac{5\pi}{12}$ rad, αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, μόνο Τριγωνομετρία, γράφοντας:

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) + 0,1 \cdot \eta\mu(3\pi t) \rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi t - 2\pi t - \frac{5\pi}{6}}{2} \cdot \eta\mu\frac{3\pi t + 2\pi t + \frac{5\pi}{6}}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) \text{ (S.I.)}$$

Όπου το «πλάτος» είναι η ποσότητα:

$$A = \left| 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) \right|$$

Έτσι τη στιγμή $t=0$ η φάση της απομάκρυνσης είναι $\varphi_0 = \left(\frac{5\pi}{2} \cdot 0 + \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12}$ ενώ το πλάτος είναι ίσο

$$\text{με: } A = \left| 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{5\pi}{12}\right) \right| = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0,05\text{m}$$

ii) Τη στιγμή που το πλάτος μεγιστοποιείται έχουμε:

$$\left| 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) \right| = 0,2 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \pm 1 \text{ ή}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = N\pi \rightarrow$$

$$t = 2N + \frac{5}{6}$$

και για $N=0$ έχουμε: $t_1 = \frac{5}{6}\text{s}$.

Σχόλιο:

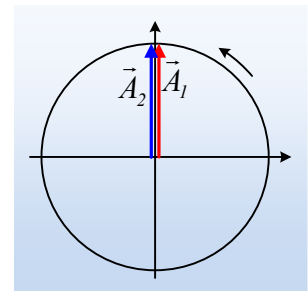
Τι στιγμή t_1 οι δύο υποθετικές ταλαντώσεις έχουν φάσεις:

$$\varphi_1 = 2\pi + \frac{5\pi}{6} = 2\pi \cdot \frac{5}{6} + \frac{5\pi}{6} = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad} \text{ και}$$

$$\varphi_2 = 3\pi = 3\pi \cdot \frac{5}{6} = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad}$$

Οι δύο ταλαντώσεις δηλαδή με απομακρύνσεις y_1 και y_2 έχουν την ίδια φάση

και αν σχεδιάσουμε τα περιστρεφόμενα διανύσματα, μέσω των οποίων μπορούμε να τις μελετήσουμε, θα έχουμε την διπλανή εικόνα.



iii) Από την εξίσωση $y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right)$ μπορούμε να υπολογίσουμε ταχύτητα και

επιτάχυνση, με την βοήθεια παραγώγων. Αν δεν μας είναι αυτό δυνατόν (είτε διότι δεν ξέρουμε παραγώγους, είτε γιατί η χρήση τους δεν μας είναι τόσο εύκολη...), μπορούμε να επιστρέψουμε στη λογική της σύνθεσης και στην αρχή της επαλληλίας. Έτσι λόγω των δύο επιμέρους ταλαντώσεων, το σώμα

έχει ταχύτητες ταλάντωσης:

$$v_1 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = 0,2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$v_1 = 0,2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi \cdot 2 + \frac{5\pi}{6}\right) = -0,2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0,1\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

$$v_2 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi) = 0,3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi) \rightarrow$$

$$v_2 = 0,3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi \cdot 2) = 0,3\pi \text{ m/s}$$

Αλλά τότε με βάση την αρχή της επαλληλίας:

$$v = v_1 + v_2 = (0,3\pi - 0,1\sqrt{3}\pi) \text{ m/s} \approx 0,4 \text{ m/s}$$

Με την ίδια λογική για τις επιμέρους επιταχύνσεις, έχουμε:

$$a_1 = -\omega^2 A \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -4 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$a_1 = -4 \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot 2 + \frac{5\pi}{6}\right) = -2 \text{ m/s}^2.$$

$$a_2 = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(3\pi) = 0.$$

Οπότε $a = a_1 + a_2 = -2 \text{ m/s}^2 + 0 = -2 \text{ m/s}^2$.

iv) Τη στιγμή t_2 το σώμα έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 0,4^2 \text{ J} = 0,016 \text{ J}$$

Ενώ για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{(\Sigma F) dx \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = ma \cdot v \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -m |a| \cdot |v| = -0,2 \cdot 2 \cdot 0,4 \text{ J/s} = -0,16 \text{ J/s}$$

dmargaris@gmail.com