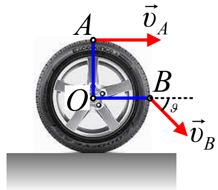
Τρεις κινήσεις ενός τροχού.

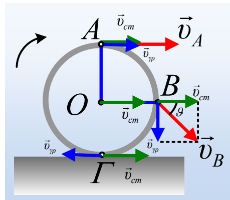
1) Σε οριζόντιο επίπεδο κινείται ένας τροχός ακτίνας R=0,5m. Η ταχύτητα του σημείου Α, στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, είναι οριζόντια μέτρου $υ_A$=4m/s, ενώ η ταχύτητα του σημείου Β, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, σχηματίζει γωνία θ=45° με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα.



   i) Να υπολογιστούν η ταχύτητα $υ_{cm}$ του άξονα Ο του τροχού και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.
   ii) Ο τροχός αυτός κυλίεται ή όχι;

Απάντηση:

i) Προφανώς η κίνηση του τροχού δεν είναι μεταφορική, αφού οι ταχύτητες των σημείων Α και Β είναι διαφορετικές. **Θεωρώντας** ότι ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση μια μεταφορική με ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}$ και μια στροφική γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο, τότε οι ταχύτητες των σημείων Α και Β, είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε από το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων για το σημείο Β (θ=45°), έχουμε ότι $υ_{cm}=υ_{γρ}$. Ερχόμαστε στο σημείο Α:



$$υ_A=υ_{cm}+υ_{γρ} \rightarrow υ_A=2υ_{cm} \rightarrow υ_{cm}=\frac{υ_A}{2}=\frac{4}{2}m/s=2m/s$$

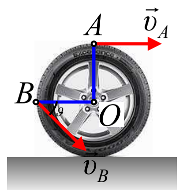
$$\text{Ενώ: } υ_{γρ}=ω\cdot R \rightarrow ω=\frac{υ_{γρ}}{R}=\frac{υ_{cm}}{R}=\frac{2}{0,5}rad/s=4rad/s.$$

ii) Εστιάζουμε στο σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος, στο σημείο Γ. Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι ταχύτητες του σημείου Γ, η ταχύτητα του κέντρου μάζας λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού και η γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της κυκλικής κίνησης του Γ γύρω από τον άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο Ο του τροχού. Τότε:

$$υ_Γ=υ_{cm}-υ_{γρ}=0.$$

Αφού το σημείο Γ δεν κινείται ως προς το έδαφος, ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει).

2) Σε οριζόντιο επίπεδο κινείται ένας τροχός ακτίνας R=0,5m. Η ταχύτητα του σημείου Α, στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, είναι οριζόντια μέτρου $υ_A$=1m/s, ενώ η ταχύτητα του σημείου Β, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, σχηματίζει γωνία θ, με εφθ=3/4 με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα.

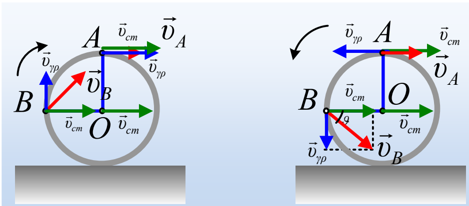


   i) Να υπολογιστούν η ταχύτητα $υ_{cm}$ του άξονα Ο του τροχού και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.

ii) Ο τροχός αυτός κυλίεται ή όχι;

Απάντηση:

i) Δουλεύοντας όπως και προηγουμένως, έχουμε ότι ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση. Δεν γνωρίζουμε όμως τη γωνιακή ταχύτητα. Αν ο τροχός στρέφεται δεξιόστροφα (όπως οι δείκτες του ρολογιού) θα έχουμε το πρώτο σχήμα, αν στρέφεται αριστερόστροφα, θα έχουμε το δεύτερο σχήμα.



Αλλά με βάση το σχήμα, στην πρώτη περίπτωση η ταχύτητα του σημείου Β θα κατευθυνόταν προς τα πάνω σε σχέση με την ακτίνα, πράγμα αντίθετο με τα δεδομένα. Έτσι το σωστό σχήμα είναι το δεύτερο. Αλλά τότε:

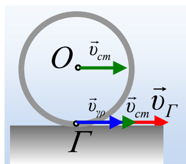
$$\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_{cm}} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_{cm}} \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = \frac{3}{4}\upsilon_{cm} \ (1)$$

Αλλά τότε:

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \upsilon_A = \upsilon_{cm} - \frac{3}{4}\upsilon_{cm} = \frac{1}{4}\upsilon_{cm} \rightarrow \upsilon_{cm} = 4\upsilon_A = 4m/s$$

Ενώ $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot R \rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{R} = \frac{3\upsilon_{cm}}{4R} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 0,5} rad/s = 6 rad/s$.

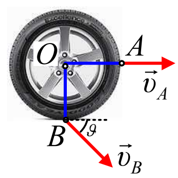
ii) Ερχόμαστε τώρα στο σημείο Γ, όπου με βάση το διπλανό σχήμα, έχουμε:



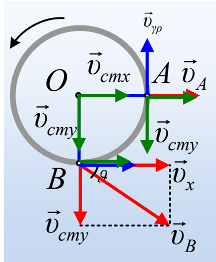
$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \frac{3}{4}\upsilon_{cm} = \frac{7}{4}\upsilon_{cm}$$

Αλλά αφού το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος έχει ταχύτητα διάφορη του μηδενός, ο τροχός ολισθαίνει και δεν κυλίεται. (Άλλο το ότι ο τροχός **και** περιστρέφεται, όπως στην περίπτωσή μας και άλλο κυλίεται).

3) Από ορισμένο ύψος (από το έδαφος) εκτοξεύεται κατάλληλα ένας τροχός, ο οποίος κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Σε μια στιγμή η ταχύτητα του σημείου Α, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, είναι οριζόντια μέτρου υ_A=3m/s, ενώ η ταχύτητα του σημείου Β, στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, σχηματίζει γωνία θ, με εφθ=4/7 με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστούν η ταχύτητα υ_{cm} του άξονα Ο του τροχού, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού. Δίνεται η ακτίνα του R=0,5m, ενώ κατά τη διάρκεια της κίνησης, ο άξονας του τροχού παραμένει διαρκώς οριζόντιος.



Απάντηση:



Στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις ο τροχός κινείται σε επαφή με ένα οριζόντιο επίπεδο, οπότε ουσιαστικά γνωρίζαμε ότι το κέντρο μάζας του είχε οριζόντια ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή όμως, ο τροχός πέφτει και έτσι το κέντρο μάζας του Ο έχει μια ταχύτητα, άλλης διεύθυνσης η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες υ_{cmx} και υ_{cmy}, όπως στο σχήμα. Ξανά αντιμετωπίζουμε την κίνηση του τροχού σαν σύνθετη, οπότε τις ίδιες συνιστώσες έχουν και τα σημεία Α και Β λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού. Όμως το σημείο Α δεν έχει κατακόρυφη ταχύτητα, πράγμα που μπορεί να συμβεί αν ο τροχός στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και η γραμμική ταχύτητα του Α έχει μέτρο:

$$\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\upsilon_{cmy}, \text{ ενώ } \upsilon_{cmx}=\upsilon_A$$

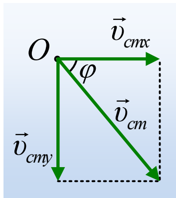
Αλλά τότε:

$$\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{\upsilon_{By}}{\upsilon_{Bx}}\rightarrow\frac{4}{7}=\frac{\upsilon_{cmy}}{\upsilon_{cmx}+\upsilon_{\gamma\rho}}\rightarrow\frac{\upsilon_{cmy}}{\upsilon_{cmx}+\upsilon_{cmy}}=\frac{4}{7}\rightarrow$$

$$7\upsilon_{cmy}=4\upsilon_{cmy}+4\upsilon_{cmx}\rightarrow 3\upsilon_{cmy}=4\upsilon_{cmx}=4\upsilon_A\rightarrow$$

$$\upsilon_{cmy}=\frac{4}{3}\upsilon_A=\frac{4}{3}3m/s=4m/s$$

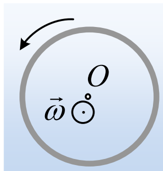
Έτσι το κέντρο μάζας Ο του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου:



$$\upsilon_{cm}=\sqrt{\upsilon_{cmx}^2+\upsilon_{cmy}^2}=\sqrt{3^2+4^2}m/s=5m/s$$

Η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ με:

$$\varepsilon\phi\varphi=\frac{\upsilon_{cmy}}{\upsilon_{cmx}}=\frac{4}{3}.$$

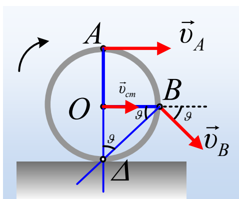


Ενώ $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\upsilon_{cmy}\rightarrow\omega=\dfrac{\upsilon_{cmy}}{R}=\dfrac{4}{0,5}rad/s=8rad/s$

Με κατεύθυνση οριζόντια (πάνω στον άξονα) και φορά προς τον αναγνώστη.

Σχόλιο για Καθηγητές:

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις μελετήσαμε την κίνηση του τροχού θεωρώντας την σύνθετη. Η αλήθεια είναι ότι η κίνηση, είναι **μια** κίνηση ελεύθερου σώματος. Το αν ΕΜΕΙΣ την θεωρήσουμε σύνθετη ή όχι, είναι δική μας επιλογή. Έτσι κάποιος θα μπορούσε να δει και να μελετήσει τις κινήσεις αυτές, ως μόνο στροφικές, γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής.



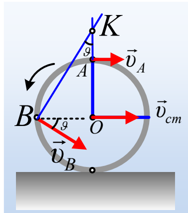
Ας το δούμε.

1) Στο πρώτο παράδειγμα, αν φέρουμε κάθετες στις ταχύτητες στα

σημεία Α και Β αυτές τέμνονται σε ένα σημείο Δ. Αλλά αφού θ=45° το τρίγωνο ΔΟΒ είναι ισοσκελές και το σημείο Δ, είναι το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος, το σημείο που στη λύση είχαμε ονομάσει, σημείο Γ. Αλλά τότε:

$$\upsilon_A=\omega\cdot r=\omega\cdot 2R \rightarrow \omega=\frac{\upsilon_A}{2R}=4rad/s \text{ και } \upsilon_{cm}=\omega R=2m/s$$

2) Στην 2η κίνηση, φέρνοντας τις κάθετες στις δυο ταχύτητες, βρίσκουμε το στιγμιαίο άξονα που περνάει από το σημείο Κ, όπου:

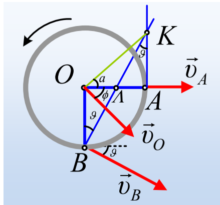


$$\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{(BO)}{(KO)}\rightarrow(KO)=\frac{R}{\varepsilon\varphi\vartheta}=\frac{0,5}{3/4}=\frac{2}{3}m\rightarrow$$

$$(KA)=\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}m=\frac{1}{6}m\rightarrow$$

$$\omega=\frac{\upsilon_A}{(KA)}=\frac{1}{1/6}rad/s=6rad/s \text{ και } \upsilon_{cm}=\omega(KO)=6\cdot\frac{2}{3}m/s=4m/s$$

3) Στο διπλανό σχήμα, με τον ίδιο τρόπο έχουμε:



$$\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{(\Lambda O)}{(BO)}\rightarrow(\Lambda O)=R\cdot\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}m=\frac{2}{7}m\rightarrow$$

$$(\Lambda A)=R-(\Lambda O)=\frac{3}{14}m \text{ και } (KA)=\frac{(A\Lambda)}{\varepsilon\varphi\vartheta}=\frac{3/14}{4/7}m=\frac{3}{8}m$$

$$\text{Οπότε } \omega=\frac{\upsilon_A}{(KA)}=\frac{3}{3/8}rad/s=8rad/s.$$

$$\text{Εξάλλου } (KO)=r_O=\sqrt{(OA)^2+(AK)^2}=\sqrt{0,5^2+\left(3/8\right)^2}m=\frac{5}{8}m \text{ συνεπώς:}$$

$$\upsilon_O=\omega\cdot r_O=8\cdot\frac{5}{8}m/s=5m/s$$

Κάθετη στην ΟΚ, όπου:

$$\sigma\phi a=\frac{R}{(AK)}=\frac{0,5}{3/8}=\frac{4}{3}$$

$$\text{Αλλά } \hat{a}+\hat{\varphi}=90^o\rightarrow\varepsilon\varphi\varphi=\frac{4}{3}$$

dmargaris@gmail.com