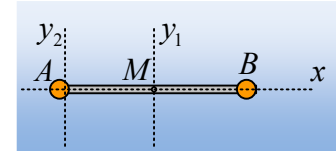


Μερικοί υπολογισμοί ροπής αδράνειας.

Παρακάτω ας δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού της ροπής αδράνειας στερεών.

Άσκηση 1^η:

Στα άκρα μιας αβαρούς ράβδου μήκους $l=2m$ έχουν προσδεθεί δυο σημειακές μάζες των $2kg$, όπως στο σχήμα, δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S . Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S , ως προς τους άξονες:



- i) y_1 , ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το μέσον της ράβδου M .
- ii) παράλληλον άξονα y_2 που περνά από το άκρο A .
- iii) άξονα z που περνά από το M και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας.
- iv) τον άξονα x κατά μήκος της ράβδου.

Απάντηση:

- i) Η ροπή αδράνειας του στερεού S είναι το άθροισμα $I = \sum m_i R_i^2$, που σημαίνει:

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + (m'_1 r_1^2 + m'_2 r_2^2 + \dots m'_v r_v^2)$$

Όπου η παρένθεση αναφέρεται στη ροπή αδράνειας της ράβδου. Αλλά από τη στιγμή που αυτή θεωρείται αβαρής, η παρένθεση είναι μηδενική και

$$I_{y_1} = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = 2 \cdot 1^2 \text{ kgm}^2 + 2 \cdot 1^2 \text{ kgm}^2 = 4 \text{ kgm}^2.$$

- ii) Με την ίδια λογική ως προς τον άξονα y_2 έχουμε:

$$I_{y_2} = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = 2 \cdot 0^2 \text{ kgm}^2 + 2 \cdot 2^2 \text{ kgm}^2 = 8 \text{ kgm}^2.$$

Εναλλακτικά με χρήση του θεωρήματος Steiner:

$$I_{y_2} = I_{cm} + Md^2.$$

Όπου $I_{cm} = I_{y_1} = 4 \text{ kgm}^2$ αφού το κέντρο μάζας του στερεού είναι το μέσον της ράβδου M . Έτσι:

$$I_{y_2} = I_{cm} + Md^2 = 4 \text{ kgm}^2 + 4 \text{ kg} \cdot 1^2 \text{ m}^2 = 8 \text{ kgm}^2.$$

- iii) Ο άξονας z περνά επίσης από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στη ράβδο, οπότε και πάλι:

$$I_z = I_{y_1} = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = 4 \text{ kgm}^2.$$

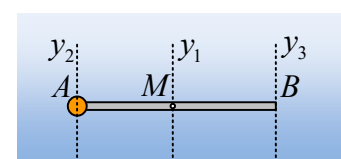
- iv) Για τον άξονα x θα έχουμε επίσης:

$$I_x = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + (m'_1 r_1^2 + m'_2 r_2^2 + \dots m'_v r_v^2) = 0$$

Αφού οι αποστάσεις των σημειακών μαζών από τον άξονα x είναι μηδενική.

Άσκηση 2^η:

Στο άκρο A μιας ομογενούς ράβδου μάζας $M=2kg$ και μήκους $l=2m$ έχουμε δέσει μια σημειακή μάζα $m=2kg$, όπως στο σχήμα, δημιουργώντας έτσι ένα



στερεό S. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τους άξονες:

- y_1 , ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το μέσον της M.
- παράλληλον άξονα y_2 που περνά από το άκρο A.
- παράλληλον άξονα y_3 που περνά από το άκρο B.
- Η ελάχιστη ροπή αδράνειας που μπορεί να εμφανίσει το στερεό ως προς άξονα y παράλληλο προς τους παραπάνω άξονες.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m\ell^2$.

Απάντηση:

- Η ροπή αδράνειας του στερεού S είναι το άθροισμα $I = \sum m_i R_i^2$, που σημαίνει:

$$I = mR_1^2 + (m'_1 r_1^2 + m'_2 r_2^2 + \dots m_v r_v^2)$$

Όπου η παρένθεση αναφέρεται στη ροπή αδράνειας της ράβδου, η οποία μας έχει δοθεί ότι είναι ίση με

$$I = \frac{1}{12} m\ell^2. \text{ Έτσι έχουμε:}$$

$$I_{y_1} = m_1 R_1^2 + \frac{1}{12} M\ell^2 = 2 \cdot 1^2 \text{ kgm}^2 + \frac{1}{12} 2 \cdot 2^2 \text{ kgm}^2 = \frac{8}{3} \text{ kgm}^2.$$

- Για τον άξονα y_2 θα έχουμε:

$$I_{y_2} = m_1 R_1^2 + I_{\rho/A} \quad (1)$$

Όπου από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων έχουμε:

$$I_{\rho/A} = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M\ell^2$$

Έτσι με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

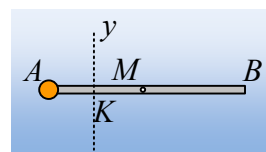
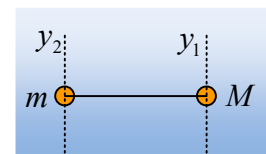
$$I_{y_2} = m_1 R_1^2 + \frac{1}{3} M\ell^2 = 2 \cdot 0^2 + \frac{1}{3} 2 \cdot 2^2 \text{ kgm}^2 = \frac{8}{3} \text{ kgm}^2.$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε την ισότητα των δύο παραπάνω ροπών αδράνειας; Περίεργο; Αν θυμηθούμε ότι το κέντρο μάζας είναι το σημείο στο οποίο θεωρούμε συγκεντρωμένη τη μάζα του στερεού, μήπως η κατάσταση είναι όμοια με το να είχαμε δυο υλικά σημεία σε απόσταση 1m; Αλλά τότε η ροπή αδράνειας ως προς τους άξονες y_1 και y_2 δεν θα ήταν η ίδια, αφού $m=M$;

- Με τον ίδιο τρόπο όπως προηγούμενα θα έχουμε:

$$I_{y_3} = m_1 R_1^2 + \frac{1}{3} M\ell^2 = 2 \cdot 2^2 \text{ kgm}^2 + \frac{1}{3} 2 \cdot 2^2 \text{ kgm}^2 = \frac{32}{3} \text{ kgm}^2.$$

- Το στερεό από όλους τους παραπάνω παράλληλους άξονες, θα παρουσιάζει τη μικρότερη ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Γιατί; Γιατί αυτό επιβάλλει το θεώρημα του Steiner: $I = I_{cm} + Md^2$. Η



ελάχιστη ροπή αδράνειας θα είναι στην περίπτωση που $d=0!$

Αλλά αν φανταστούμε, με βάση το προηγούμενο σχόλιο, το στερεό ως ένα σύστημα δύο σημειακών μαζών, το κέντρο μάζας του, θα είναι ένα σημείο K , στο μέσον της AM . Έτσι θα έχουμε:

$$I_{cm/s} = I_K = m(AK)^2 + I_{\rho/K}$$

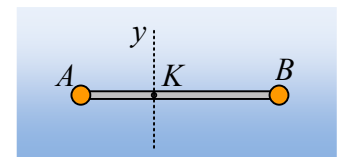
Όπου για τη ράβδο:

$$I_{\rho/K} = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}M\ell^2 \rightarrow$$

$$I_{cm/s} = m(AK)^2 + \frac{7}{48}M\ell^2 = 2 \cdot 0,5^2 \text{ kgm}^2 + \frac{7}{48}2 \cdot 2^2 \text{ kgm}^2 = \frac{5}{3} \text{ kgm}^2.$$

Άσκηση 3^η:

Στα άκρα A και B μιας ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους $l=2\text{m}$ έχουμε δέσει δύο σημειακές μάζες m_1 και $m_2=2\text{kg}$, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S . Η ροπή αδράνειας του στερεού S ως προς τον άξονα y , ο οποίος είναι κάθετος τη ράβδο, περνώντας από το σημείο K , είναι $I=4\text{kgm}^2$. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S_1 που θα προκύψει αν αφαιρεθεί η μάζα m_2 , ως προς τον ίδιο άξονα y .



Απάντηση:

Η ροπή αδράνειας του στερεού S ως προς άξονα y είναι ίση με το άθροισμα:

$$I_{y/s} = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I_{\rho/K}$$

Όπου R_1, R_2 οι αποστάσεις των σημειακών μαζών από το K και $I_{\rho/K}$ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα στο K . Αλλά τότε αντίστοιχα η ροπή αδράνειας του στερεού S_1 θα είναι:

$$I_{y/s_1} = m_1 R_1^2 + I_{\rho/K} = I_{y/s} - m_2 R_2^2 = 10\text{kgm}^2 - 2 \cdot 1^2 \text{ kgm}^2 = 8\text{kgm}^2.$$

Συμπέρασμα:

Το στερεό S μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από το στερεό S_1 και τη σημειακή μάζα m_2 . Αλλά τότε θα μπορούσαμε να γράψουμε:

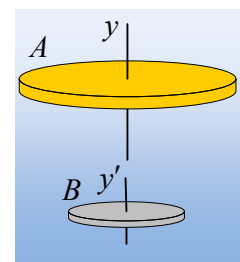
$$I_{y/s} = I_{y/s_1} + I_{y/m_2} \rightarrow$$

$$I_{y/s_1} = I_{y/s} - I_{y/m_2}$$

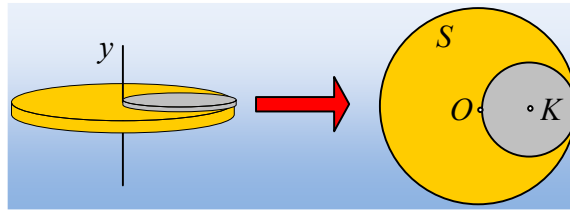
Άσκηση 4^η:

Ένας ομογενής δίσκος A ακτίνας $R=1\text{m}$ και μάζας $M=8\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται ως προς κατακόρυφο άξονα z που διέρχεται από το κέντρο του O , όπως στο σχήμα.

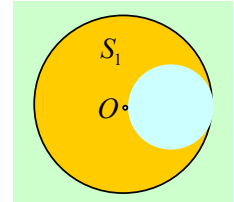
- Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον παραπάνω άξονα.
- Ένας δεύτερος δίσκος B του ίδιου πάχους και από το ίδιο υλικό, έχει ακτίνα $r=0,5\text{m}$. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του δίσκου B ως προς κάθετο άξονα y' που περνά από το κέντρο του K .



- iii) Τοποθετούμε το δίσκο Β πάνω στον Α, όπως στο σχήμα και συγκολλώντας τον, δημιουργούμε το στερεό S. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τον άξονα y.



- iv) Από τον αρχικό δίσκο Α, αφαιρούμε ένα τμήμα του, κυκλικού σχήματος, ακτίνας $r=0,5\text{m}$, οπότε απομένει το υπόλοιπο τμήμα του, όπως στο σχήμα, ας το ονομάσουμε S_1 . Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S_1 ως προς τον άξονα y.



Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου, ως προς κάθετο άξονα που περνάει από το

$$\text{κέντρο του } I = \frac{1}{2} mR^2.$$

Απάντηση:

- i) Η ροπή αδράνειας του δίσκου Α ως προς τον άξονα y θα είναι:

$$I_A = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} 8 \cdot 1^2 \text{kgm}^2 = 4 \text{kgm}^2.$$

- ii) Με τον ίδιο τρόπο η ροπή αδράνειας του Β, ως προς τον άξονα y' είναι:

$$I_B = \frac{1}{2} mr^2$$

Αλλά αν x το πάχος των δίσκων, τότε η μάζα του Α δίσκου είναι:

$$M = \rho V = \rho \cdot (\pi R^2 x)$$

Ενώ η αντίστοιχη του Β δίσκου:

$$m = \rho V = \rho \cdot (\pi r^2 x)$$

Με διαίρεση των παραπάνω σχέσεων κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{m}{M} = \frac{\rho \cdot (\pi r^2 x)}{\rho \cdot (\pi R^2 x)} = \frac{r^2}{R^2} \rightarrow m = M \frac{r^2}{R^2} = 8 \text{kg} \frac{0,5^2}{1^2} = 2 \text{kg}.$$

Οπότε η ζητούμενη ροπή αδράνειας είναι:

$$I_B = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 0,5^2 \text{kgm}^2 = 0,25 \text{kgm}^2.$$

- iii) Για το στερεό S έχουμε:

$$I_{s/y} = I_{A/y} + I_{B/y} = I_A + (I_B + mr^2) = 4 \text{kgm}^2 + (0,25 + 2 \cdot 0,5^2) \text{kgm}^2 = 4,75 \text{kgm}^2.$$

- iv) Το τμήμα που αφαιρούμε, είναι ένας δίσκος ίδιος με τον Β! Αλλά τότε για τον αρχικό δίσκο Α, θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$I_{A/y} = I_{s1/y} + I_{B/y}$$

Όπου $I_{B/y} = I_B + mr^2 = (0,25 + 2 \cdot 0,5^2) \text{kgm}^2 = 0,75 \text{kgm}^2$. Οπότε:

$$I_{s1/y} = I_{A/y} - I_{B/y} = 4 \text{kgm}^2 - 0,75 \text{kgm}^2 = 3,25 \text{kgm}^2.$$

dmargaris@gmail.com