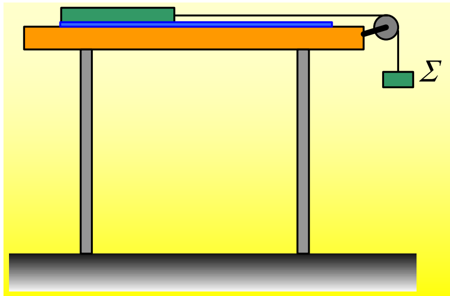
Το ιξώδες και η κίνηση της πλάκας.

Πάνω σε ένα τραπέζι έχει στρωθεί ένα λεπτό στρώμα μηχανέλαιου πάχους ℓ=0,1cm. Μια πλάκα μάζας m_1=0,5kg και εμβαδού A=0,2m^2, ηρεμεί πάνω στην γλυκερίνη. Δένουμε την πλάκα με αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από αβαρή τροχαλία όπως στο σχήμα, στο άλλο του άκρο του δένουμε ένα σώμα Σ, μάζας m_2= 0,5kg, το οποίο κάποια στιγμή (t=0) αφήνουμε να κινηθεί.



i) Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ.

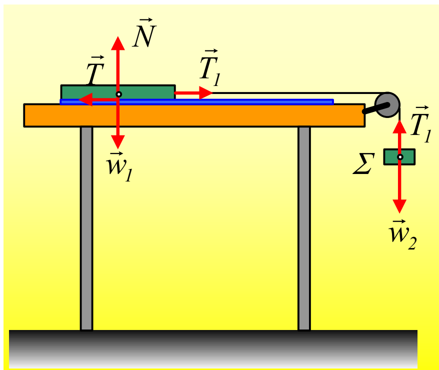
ii) Αν μετά από λίγο, το σώμα Σ αποκτά σταθερή ταχύτητα πτώσης υ=10cm/s, να βρεθεί ο συντελεστής ιξώδους του μηχανέλαιου.

iii) Ποια η επιτάχυνση της πλάκας τη στιγμή που έχει ταχύτητα $υ_1$=4cm/s, θεωρώντας ότι κάθε στιγμή ισχύει η γνωστή εξίσωση για την τριβή που ασκείται στην πλάκα από το μηχανέλαιο.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε πλάκα και σώμα Σ, όπου αφού το νήμα και η τροχαλία είναι αβαρή, η τάση του νήματος, που ασκείται στα σώματα έχει το ίδιο μέτρο T_1, ενώ $\vec{T}$ είναι η δύναμη τριβής που δέχεται η πλάκα από το μηχανέλαιο. Η πλάκα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε $N=w_1$.



Η τριβή έχει μέτρο $T = nA\dfrac{υ}{\ell}$, οπότε για t=0, όπου υ=0 δεν ασκείται τριβή και από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα, έχουμε:

Σώμα Σ: $ΣF=m_2 \cdot α \rightarrow m_2g-T_1=m_2α$

Πλάκα: $ΣF_x=m_1α \rightarrow T_1=m_1α$

Τα δυο σώματα προφανώς θα κινούνται μαζί, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$m_2 g = (m_1 + m_2)a \rightarrow \quad a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0,5}{0,5+0,5} 10m/s^2 = 5m/s^2$$

ii) Μόλις τα σώματα αποκτήσουν σταθερή ταχύτητα, θα έχουμε $ΣF_Σ=0$ ή $T_1=w_2$, αλλά και $ΣF_π=0$, οπότε:

$$T_1=T \rightarrow \; m_2 g = nA\frac{υ}{\ell} \rightarrow$$

$$n = \frac{m_2 g \ell}{Aυ} = \frac{0,5 \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}}{0,2 \cdot 0,1} = 0,25 N \cdot s/m^2 .$$

iii) Τη στιγμή που η ταχύτητα των σωμάτων είναι υ_1 η τριβή που ασκείται στην πλάκα, έχει μέτρο:

$$T = nA\frac{\upsilon}{\ell} = 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0{,}1 \cdot 10^{-2}} N = 2N$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα, έχουμε για:

Σώμα Σ: $\Sigma F = m_2 \cdot \alpha_1 \rightarrow m_2 g - T_1 = m_2 \alpha_1$

Πλάκα: $\Sigma F_x = m_1 \alpha_1 \rightarrow T_1 - T = m_1 \alpha_1$

Τα δυο σώματα προφανώς θα κινούνται μαζί, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$m_2 g - T = (m_1 + m_2) a_1 \quad (1)$$

$$a_1 = \frac{m_2 g - T}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}5 \cdot 10 - 2}{0{,}5 + 0{,}5} 10 m/s^2 = 3 m/s^2 .$$

Σχόλιο για καθηγητές:

Ο παραπάνω εξίσωση (1) γράφεται:

$$m_2 g - nA\frac{\upsilon}{\ell} = (m_1 + m_2)\frac{d\upsilon}{dt} \rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)\frac{d\upsilon}{dt} + nA\frac{\upsilon}{\ell} - m_2 g = 0$$

Η παραπάνω, είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$A\frac{dx}{dt} + Bx + C = 0$$

Η λύση της οποίας είναι της μορφής $x = \frac{-C}{B}\left(1 - e^{-\frac{B}{A}t}\right)$ και στην περίπτωσή μας:

$$\upsilon = \frac{m_2 g}{\frac{nA}{\ell}}\left(1 - e^{-\frac{nA}{(m_1 + m_2)\ell}t}\right) = \frac{m_2 g \ell}{nA}\left(1 - e^{-\frac{nA}{(m_1 + m_2)\ell}t}\right)$$

Έτσι για t→∞, $\upsilon \rightarrow \frac{m_2 g \ell}{nA} = 0{,}1 m/s$ η λεγόμενη και οριακή ταχύτητα. Στην πράξη βέβαια η ταχύτητα αυτή αποκτάται σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5\frac{(m_1 + m_2)\ell}{nA} = 5\frac{(0{,}5 + 0{,}5) \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-2}}{0{,}25 \cdot 0{,}2} s = 0{,}1 s$!!!

Όλα αυτά βέβαια, με την προϋπόθεση, ότι η εξίσωση $T = nA\frac{\upsilon}{\ell}$ ισχύει κάθε στιγμή και όχι μόνο όταν έχουμε σταθερή ταχύτητα, πράγμα όχι απόλυτα σωστό…

dmargaris@gmail.com