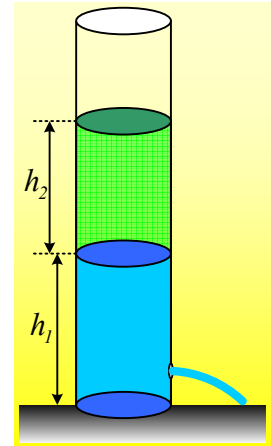


Εκροή από ένα δοχείο με δύο υγρά.

Σε ένα μεγάλο κατακόρυφο σωλήνα ηρεμούν δύο υγρά, νερό με πυκνότητα $\rho_1=1.000\text{kg/m}^3$ και λάδι πυκνότητας $\rho_2=700\text{kg/m}^3$, όπως στο σχήμα, όπου $h_1=0,8\text{m}$ και $h_2=0,7\text{m}$. Μια τάπα, κλείνει μια οπή του δοχείου, εμβαδού $A=0,4\text{cm}^2$, η οποία βρίσκεται σε ύψος $h=0,2\text{m}$ από την βάση του σωλήνα.



- i) Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται η τάπα από το νερό, καθώς και η δύναμη την οποία δέχεται από τα τοιχώματα του σωλήνα, θεωρώντας αμελητέο το βάρος της.
- ii) Σε μια στιγμή βγάζουμε την τάπα, οπότε μέσα σε ελάχιστο χρόνο, αποκαθίσταται μια μόνιμη και στρωτή ροή. Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής, θεωρώντας ότι η διατομή του σωλήνα, είναι πολύ μεγαλύτερη από την διατομή της οπής.
- iii) Αν η διατομή του σωλήνα έχει εμβαδόν $A_1=2\text{cm}^2$, να υπολογιστεί ξανά η ταχύτητα εκροής, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η πάνω επιφάνεια του λαδιού.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at}=10^5\text{N/m}^2$, ενώ και οι δύο παραπάνω ροές να θεωρηθούν μόνιμες και στρωτές ροές ιδανικού ρευστού.

Παρατήρηση: Η ταχύτητα εκροής του νερού δεν θα παραμένει σταθερή, αλλά θα μειώνεται καθώς θα κατεβαίνει η στάθμη του λαδιού, οπότε γενικά, η ροή δεν θα είναι μόνιμη. Η ζητούμενη ταχύτητα εκροής, είναι αυτή που θα αποκατασταθεί μέσα σε ελάχιστο χρόνο, μόλις απομακρυνθεί η τάπα και την οποία για ένα μικρό διάστημα μπορούμε να θεωρήσουμε σταθερή.

Απάντηση:

- i) Θεωρώντας πολύ μικρό το εμβαδόν της τάπας μπορούμε να δεχτούμε ότι σε όλα τα σημεία της, επικρατεί η ίδια πίεση p_Δ . Αλλά στην επιφάνεια του λαδιού $p_B=p_{at}$, ενώ αν πάρουμε το σημείο Γ στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών:

$$p_\Gamma - p_B = \rho_2 g h_2 \rightarrow p_\Gamma = p_B + \rho_2 g h_2.$$

$$\text{Όμοια } p_\Delta - p_\Gamma = \rho_1 g (h_1 - h) \rightarrow p_\Delta = p_\Gamma + \rho_1 g (h_1 - h) \quad \text{ή}$$

$$p_\Delta = p_{at} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g (h_1 - h)$$

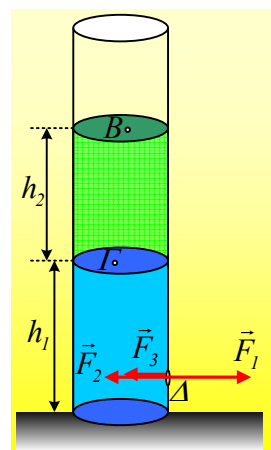
Αλλά τότε η τάπα δέχεται μια οριζόντια δύναμη από το νερό μέτρου:

$$F_1 = p_\Delta \cdot A = (p_{at} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g (h_1 - h)) \cdot A$$

$$F_1 = (10^5 + 700 \cdot 10 \cdot 0,7 + 1.000 \cdot 10 \cdot 0,6) \cdot 0,4 \cdot 10^{-4} \text{N} = 4,436 \text{N}$$

Εξάλλου η τάπα δέχεται από την ατμόσφαιρα οριζόντια δύναμη:

$$F_2 = p_{at} \cdot A = 10^5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-4} \text{N} = 4 \text{N}.$$



Αλλά η τάπα ισορροπεί και αν F_3 η δύναμη που δέχεται από τα τοιχώματα του σωλήνα, ισχύει:

$$F_1 = F_2 + F_3 \rightarrow F_3 = F_1 - F_2 = 4,436N - 4N = 0,436N.$$

- ii) Αφαιρώντας την τάπα, το νερό χύνεται με ταχύτητα εκροής v . Δεχόμενοι ότι ο σωλήνας έχει πολύ μεγαλύτερη διατομή, από την οπή, μπορούμε να αποδεχτούμε, ότι η επιφάνεια του λαδιού, παραμένει σε σταθερό ύψος και το λάδι ηρεμεί, οπότε και $v_1 = 0$.

$$\text{Αλλά τότε } p_\Gamma = p_B + \rho_2 g h_2. \quad (\alpha)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΓΔ, παίρνουμε (θεωρούμε $h=0$ τον πυθμένα του σωλήνα) :

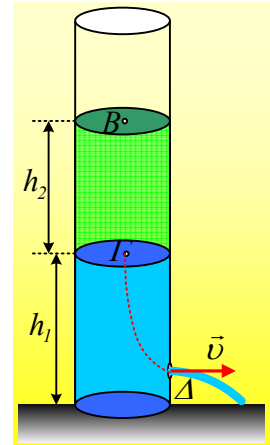
$$p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho_1 v_\Gamma^2 + \rho_1 g h_1 = p_\Delta + \frac{1}{2} \rho_1 v_\Delta^2 + \rho_1 g h \quad (1)$$

Όπου $p_\Delta = p_{at}$ και $v_\Gamma = 0$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$p_{at} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 = p_{at} + \frac{1}{2} \rho_1 v_\Delta^2 + \rho_1 g h \rightarrow$$

$$v_\Delta = v = \sqrt{2 \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_2 + 2g(h_1 - h)} \rightarrow$$

$$v = \sqrt{2 \frac{700}{1.000} 10 \cdot 0,7 + 2 \cdot 10(0,8 - 0,2)} m/s = \sqrt{9,8 + 12} m/s = \sqrt{21,8} m/s \approx 4,67 m/s$$



- iii) Στην περίπτωση που η διατομή του σωλήνα, δεν μπορεί να θεωρηθεί πολύ μεγαλύτερη αυτής της τάπας, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε μηδενική την ταχύτητα του σημείου Γ και ακίνητη την στήλη του λαδιού. Έστω λοιπόν τώρα ότι η πάνω επιφάνεια του λαδιού κατέρχεται με ταχύτητα v_1 . Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Β και Γ έχουμε:

$$A_B \cdot v_1 = A_\Gamma \cdot v_\Gamma \rightarrow v_\Gamma = v_1 \quad (2)$$

Αλλά επίσης, από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής του νερού στο Γ και στην τάπα:

$$A_\Gamma \cdot v_1 = A_\Delta \cdot v_\Delta \rightarrow v_\Delta = \frac{A_\Gamma}{A} v_1 = \frac{2cm^2}{0,4cm^2} v_1 = 5v_1 \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΒΓ (εντός του λαδιού) και παίρνουμε (θεωρούμε $h=0$ τον πυθμένα του σωλήνα) :

$$p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho_2 v_\Gamma^2 + \rho_2 g h_1 = p_B + \frac{1}{2} \rho_2 v_B^2 + \rho_2 g(h_1 + h_2) \rightarrow$$

$$p_\Gamma = p_B + \rho_2 g h_2 \quad (\beta)$$

Από (α) και (β) παρατηρούμε ότι η πίεση στο σημείο Γ είναι ίδια στην περίπτωση που η στήλη του λαδιού είναι ακίνητη και στην περίπτωση που έχουμε μόνιμη και στρωτή ροή, όπου η ταχύτητα της στήλης παραμένει σταθερή (ισορροπία στήλης).

Ξανά με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΓΔ, παίρνουμε (θεωρούμε $h=0$ τον πυθμένα του σωλήνα) :

$$p_{\Gamma} + \frac{1}{2} \rho_1 v_{\Gamma}^2 + \rho_1 g h_1 = p_{\Delta} + \frac{1}{2} \rho_1 v_{\Delta}^2 + \rho_1 g h \rightarrow$$

$$p_{at} + \rho_2 g h_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_{at} + \frac{1}{2} \rho_1 v_{\Delta}^2 + \rho_1 g h \rightarrow$$

$$\rho_2 g h_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \cdot 25 v_1^2 + \rho_1 g h \rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{12 \rho_1} g h_2 + \frac{1}{12} g (h_1 - h)} \rightarrow$$

$$v_1 = v_B = \sqrt{\frac{700}{12 \cdot 1.000} 10 \cdot 0,7 + \frac{1}{12} 10 (0,8 - 0,2)} m/s = \sqrt{\frac{10,9}{12}} m/s \approx 0,95 m/s$$

Συνεπώς ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η πάνω επιφάνεια του λαδιού, είναι $v_1=95\text{cm/s}$, ενώ από την (3) η ταχύτητα εκροής του νερού στην οπή είναι:

$$v_{\Delta} = 5v_1 = 5 \cdot 0,95 m/s = 4,75 m/s$$

dmargaris@gmail.com