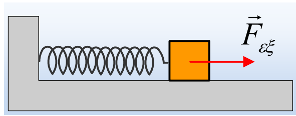
# *Από τη σύνθεση σε μια εξαναγκασμένη!*

Ένα σώμα μάζας m=0,1kg έχει εξίσωση κίνησης x=2συν(20t) – 2·ημ(20t) (μονάδες στο S.I.).

i) Να υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή $t_1$=π/40s. Έχει δυναμική ενέργεια το σώμα τη στιγμή αυτή και αν ναι, πόση είναι αυτή;

ii) Το ίδιο σώμα, δένεται στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=8N/m και με την επίδραση μιας αρμονικής εξωτερικής δύναμης, εκτελεί ταλάντωση με απομάκρυνση x=0,5·ημ(10t) (S.I.), ενώ δέχεται και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{απ}$=-0,2·υ (S.I.).




α) Να βρεθούν οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Ποιες οι αντίστοιχες εξισώσεις της δύναμης επαναφοράς και της δύναμης απόσβεσης, σε συνάρτηση με το χρόνο;

γ) Να βρεθεί η εξίσωσης της εξωτερικής δύναμης, σε συνάρτηση με το χρόνο ($F_{εξ}$-t).

δ) Για τη χρονική στιγμή $t_1$=π/30s, να βρεθεί η ισχύς της εξωτερικής δύναμης, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης.

Δίνεται ημ(π/12) ≈ 0,26 .

## *Απάντηση:*

i) Η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$x=2συν(20t) - 2\cdotημ(20t) = 2\cdot ημ\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot ημ(20t+\pi)$$

Αλλά τότε η κίνηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, με το ίδιο πλάτος 2m, την ίδια γωνιακή συχνότητα ω=20rad/s και διαφορά φάσης:

$$Δφ= (20t+\pi)-\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

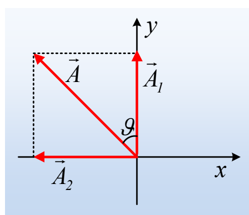
Αλλά τότε το πλάτος της «σύνθετης ταλάντωσης» είναι:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2συν\frac{\pi}{2}}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=2\sqrt{2}m$$

$$\text{Ενώ } εφ\vartheta=\frac{A_2}{A_1}=1\rightarrow \vartheta=\frac{\pi}{4}$$

Και η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$x=2\sqrt{2}\cdot ημ\left(20t+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\cdot ημ\left(20t+\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{(S.I.)}$$




***Σχόλιο:***

*Αλήθεια, πολύ τυπική και «ψυχρή» δεν είναι η παραπάνω διαδικασία;*

*Αν χρησιμοποιούσαμε όμως δύο περιστρεφόμενα διανύσματα με μήκη $A_1$=2m και $A_2$=2m, όπως στο διπλανό σχήμα, κάποια στιγμή όπου t=0 ή t=NT, τότε το πλάτος της ταλάντωσης,* *είναι το διάνυσμα Α, το μέτρο του οποίου υπολογίζεται από το πυθαγόρειο θεώρημα, ενώ η γωνία θ, μας δείχνει πόσο προηγείται το διάνυσμα* $\vec{A}$ *του* $\vec{A}_1$.

Αλλά τότε η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή $t_1$ είναι ίση:

$$\upsilon = 2\sqrt{2}\cdot 20\cdot \sigma\upsilon\nu\left(20t+\frac{3\pi}{4}\right) = 40\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(20\frac{\pi}{40}+\frac{3\pi}{4}\right) = 40\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ ή}$$

$$\upsilon = 40\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -40m/s$$

Οπότε το σώμα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}0{,}1\cdot 40^2 J = 80J$$

**Δεν ξέρουμε**, αν το σώμα έχει ή δεν έχει δυναμική ενέργεια. Η εξίσωση $x = 2\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(20t+\frac{3\pi}{4}\right)$ μας λέει ότι η απομάκρυνση μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, αλλά δεν σημαίνει ότι η κίνηση είναι υποχρεωτικά και ΑΑΤ!

Αν είναι πράγματι ΑΑΤ, τότε θα έχει και δυναμική ενέργεια:

$$U_1 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 = \frac{1}{2}0{,}1\cdot 20^2\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^2 J = 80J$$

ii) Το σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης x=0,5·ημ(10t) οπότε για ταχύτητα και επιτάχυνση έχουμε:

α) $\upsilon=\omega\cdot A\cdot\sigma\upsilon\nu(10t) = 5\cdot\sigma\upsilon\nu(10t)$ (S.I.) και

$\alpha=-\omega^2 A\cdot\eta\mu(10t) = -50\cdot\eta\mu(10t)$ (S.I.)

β) $F_{\varepsilon\pi}=-D\cdot x = -k\cdot x = -8\cdot 0{,}5\cdot\eta\mu(10t) = -4\cdot\eta\mu(10t)$ (S.I.) και

$F_{\alpha\pi}=-b\cdot\upsilon = -0{,}2\cdot 5\cdot\sigma\upsilon\nu(10t) = -1\cdot\sigma\upsilon\nu(10t)$ (S.I.)

γ) Παίρνοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα έχουμε ΣF=mα ή

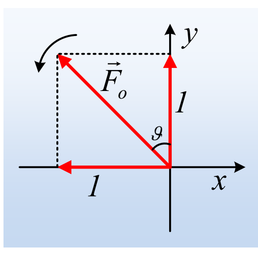
$$F_{\varepsilon\xi} + F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\pi} = ma \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\xi} - Dx - b\upsilon = ma \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\xi} - 4\cdot\eta\mu(10t) - 1\cdot\sigma\upsilon\nu(10t) = -5\cdot\eta\mu(10t) \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\xi} = 1\cdot\sigma\upsilon\nu(10t) - 1\cdot\eta\mu(10t) = 1\cdot\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) + 1\cdot\eta\mu(10t+\pi)$$

Δουλεύοντας όπως παραπάνω, με τη βοήθεια των περιστρεφομένων διανυσμάτων, έχουμε για t=0, το διπλανό σχήμα, όπου κάθε διάνυσμα έχει μέτρο 1N και στρέφονται με γωνιακή συχνότητα ω=10rad/s. Αλλά τότε:




$$F_o = \sqrt{1^2+1^2}N = \sqrt{2}N \quad \text{και } \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{1N}{1N} = 1 \text{ ή } \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

Αλλά τότε η εξίσωσης της εξωτερικής δύναμης, είναι της μορφής:

$$F_{\varepsilon\xi} = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

δ) Για τη στιγμή $t_1$ η εξωτερική δύναμη έχει τιμή:

$$F_{\varepsilon\xi} = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10\frac{\pi}{30} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx -0{,}37N$$

Ενώ το σώμα έχει ταχύτητα:

$$\upsilon = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10\frac{\pi}{30}\right) = 2{,}5m/s$$

Οπότε $P_{F\varepsilon\xi} = \dfrac{dW}{dt} = |F_{\varepsilon\xi}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -0{,}37 \cdot 2{,}5W \approx -0{,}92W$

Η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης. Αλλά τη στιγμή αυτή η δύναμη απόσβεσης έχει τιμή:

$$F_{\alpha\pi} = -1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = -1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10\frac{\pi}{30}\right) = -\frac{1}{2}N$$

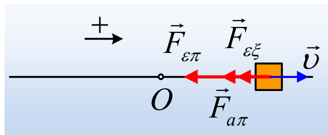
$$P_{F\alpha\pi} = \frac{dW}{dt} = |F_{\alpha\pi}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -|F_{\alpha\pi}| \cdot |\upsilon| = -\frac{1}{2} \cdot 2{,}5W = -1{,}25W$$

Αλλά τότε ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική είναι ίσος με 1,25J/s.

***Σχόλιο:***

Τη στιγμή $t_1$ το σώμα βρίσκεται στη θέση:

$$x = 0{,}5 \cdot \eta\mu(10t) = 0{,}5 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)m = 0{,}25\sqrt{3}m$$




έχοντας επιτάχυνση:

$$\alpha = -50 \cdot \eta\mu(10t) = -25\sqrt{3}m/s^2$$, οπότε:

$$\frac{dK}{dt} = (\Sigma F)\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -m\alpha \cdot \upsilon = -0{,}1 \cdot 25\sqrt{3} \cdot 2{,}5J/s = -6{,}25\sqrt{3}J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -|Dx||\upsilon|\sigma\upsilon\nu 180^o = 8 \cdot 0{,}25\sqrt{3} \cdot 2{,}5J/s = 5\sqrt{3}J/s$$

Συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = -6{,}25\sqrt{3}J/s + 5\sqrt{3}J/s = -1{,}25\sqrt{3}J/s \approx -2{,}17J$$

Συμπέρασμα: Η ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται κατά 2,17J/s. Ένα μέρος, 1,25J/s μετατρέπονται σε θερμική και το υπόλοιπο 0,92J/s αφαιρείται από το σύστημα μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης!

***dmargaris@gmail.com***