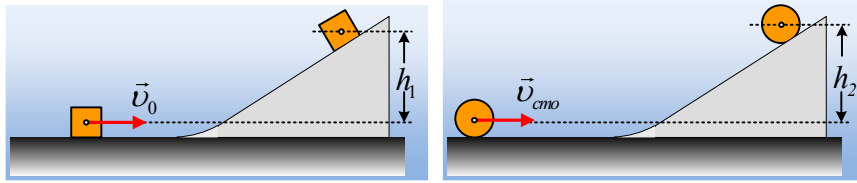


Ποιο σώμα θα φτάσει σε μεγαλύτερο ύψος;

1^η παραλλαγή:



Ένα σώμα κυβικού σχήματος ακμής a , κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_0 . Στην πορεία του συναντά λείο κεκλιμένο επίπεδο, με ομαλή κλίση, ώστε να μπορέσει ομαλά να συνεχίσει την κίνησή του, σε αυτό. Ο κύβος ανέρχεται μέχρι ύψος h_1 , πριν κινηθεί ξανά προς τα κάτω.

Κατά μήκος της ίδιας διαδρομής κινείται τώρα ένας κύλινδρος ακτίνας $R=a/2$, ο οποίος κυλιεται με ταχύτητα κέντρου μάζας $v_{cm}=v_0$, ίση με την αρχική ταχύτητα του κύβου.

i) Αν h_2 είναι τώρα το αντίστοιχο μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει ο κύλινδρος, ισχύει:

$$\alpha) h_1 < h_2, \quad \beta) h_1 = h_2, \quad \gamma) h_1 > h_2.$$

ii) Τη στιγμή που ο κύλινδρος σταματά την ανοδική του κίνηση, έχει μηχανική ενέργεια:

$$\alpha) E=mgh_1, \quad \beta) E=1,5 mgh_1, \quad \gamma) E=2mgh_1.$$

Θεωρείστε το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας του κύβου, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, ενώ για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση:

i) Κατά την κίνηση του κύβου, η μηχανική ενέργεια διατηρείται, αφού δέχεται μόνο το βάρος και την κάθετη αντίδραση, η οποία δεν παράγει έργο:

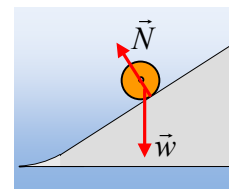
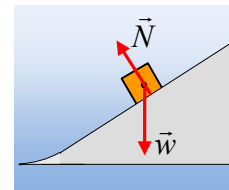
$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + mgh_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + mgh_1 \rightarrow h_1 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Αλλά και κατά την κίνηση του κυλίνδρου, δεν ασκείται τριβή ολίσθησης πάνω του από το επίπεδο, οπότε ξανά η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εξάλλου στον κύλινδρο δεν ασκείται κάποια ροπή, με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του, να παραμένει σταθερή κατά την άνοδό του κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$



$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_2 \rightarrow h_2 = \frac{v_{cm}^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} = h_1.$$

Σωστή η β) πρόταση.

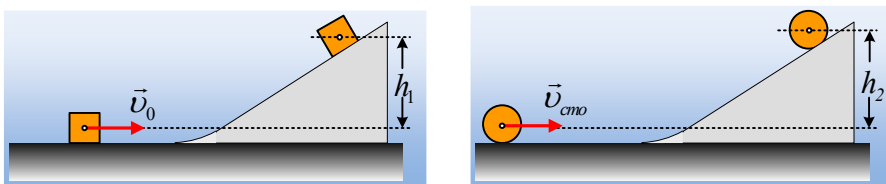
ii) Η τελική μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου (ίση και με την αρχική...) είναι:

$$E_{Mηχ} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R} mR^2 \omega^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{4}mv_{cm}^2 = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 \rightarrow$$

$$E_{Mηχ} = \frac{3}{4}mv_0^2 \xrightarrow{(1)} E_{Mηχ} = \frac{3}{2}mgh_1$$

Σωστή η β) πρόταση.

2^η παραλλαγή:



Ένα σώμα κυβικού σχήματος ακμής a , κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_0 . Στην πορεία του συναντά λείο κεκλιμένο επίπεδο, με ομαλή κλίση, ώστε να μπορέσει ομαλά να συνεχίσει την κίνησή του, σε αυτό. Ο κύβος ανέρχεται μέχρι ύψος h_1 , πριν κινηθεί ξανά προς τα κάτω.

Κατά μήκος παρόμοιας διαδρομής, αλλά που τα επίπεδα (οριζόντιο και κεκλιμένο), δεν είναι λεία, κινείται τώρα ένας κύλινδρος ακτίνας $R=a/2$, ο οποίος κυλιέται διαρκώς ξεκινώντας με αρχική ταχύτητα κέντρου μάζας $v_{cm}=v_0$, ίση με την αρχική ταχύτητα του κύβου.

i) Αν h_2 είναι τώρα το αντίστοιχο μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει ο κύλινδρος, ισχύει:

$$\alpha) h_1 < h_2, \quad \beta) h_1 = h_2, \quad \gamma) h_1 > h_2.$$

ii) Τη στιγμή που ο κύλινδρος σταματά την ανοδική του κίνηση, έχει μηχανική ενέργεια:

$$\alpha) E=mgh_1, \quad \beta) E=1,5 mgh_1, \quad \gamma) E=2mgh_1.$$

Θεωρείστε το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας του κύβου, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, ενώ για τον κύλινδρο $I= \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση:

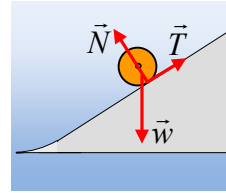
i) Όπως και στην προηγούμενη παραλλαγή, για τον κύβο, θα ισχύει:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgh_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgh_1 \rightarrow h_1 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Κατά την κίνηση του κυλίνδρου, στο οριζόντιο επίπεδο δεν ασκείται τριβή, οπότε τόσο η ταχύτητα του κ.μ. όσο και η γωνιακή του ταχύτητα παραμένουν σταθερές. Στο κεκλιμένο επίπεδο ασκείται πάνω του τριβή, αλλά αφού κυλιέται, η τριβή θα είναι στατική, οπότε ξανά η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εξάλλου κάθε στιγμή θα ισχύει $v_{cm} = \omega R$, με αποτέλεσμα τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας, να μηδενίζεται και η γωνιακή του ταχύτητα.



$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega_o^2 = 0 + mgh_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = mgh_2$$

$$\frac{3}{4} m v_{cm}^2 = mgh_2 \rightarrow h_2 = \frac{3v_{cm}^2}{4g} > \frac{2v_0^2}{4g} = h_1$$

Σωστή η α) πρόταση.

ii) Η τελική μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου είναι:

$$E_{Mηχ} = mgh_2 = mg \frac{3v_{cm}^2}{4g} = \frac{3}{2} \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \rightarrow$$

$$E_{Mηχ} = \frac{3}{2} \frac{1}{2} m v_0^2 \xrightarrow{(1)} E_{Mηχ} = \frac{3}{2} mgh_1$$

Σωστή η β) πρόταση.

dmargaris@gmail.com