Τι δεν είναι η πίεση!!!

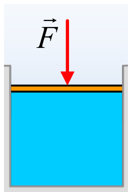
Η πρώτη «θερινή» ανάρτησή μου στα ρευστά ήταν η

Μερικές εισαγωγικές ερωτήσεις στα ρευστά.

Μια προσπάθεια, μέσω κάποιων ερωτημάτων, να τεθεί ένα πλαίσιο αρχικών βασικών γνώσεων όσον αφορά τα υγρά. Επειδή παρατηρώ κάποιες απορίες αλλά και λανθασμένες ερμηνείες σε βασικές ιδέες, ας κάνουμε μια δεύτερη προσπάθεια, συζητώντας και αναλύοντας κάποιες από αυτές τις ιδέες.

Η πίεση δεν είναι εσωτερική ενέργεια.

Είναι σωστή η πρόταση ότι η πίεση ενός υγρού εκφράζει την εσωτερική του ενέργεια;



Έστω ότι έχουμε ένα δοχείο, με αδιαβατικά τοιχώματα, το οποίο περιέχει ένα ασυμπίεστο υγρό και κλείνεται με ένα αβαρές έμβολο, έξω από την ατμόσφαιρα και μακριά από βαρυτικά πεδία. Προφανώς το υγρό έχει κάποια εσωτερική ενέργεια (απροσδιόριστης τιμής…). Σε μια στιγμή ασκούμε μια δύναμη F στο έμβολο, με αποτέλεσμα σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του υγρού να έχουμε μια τιμή πίεσης $p=\frac{F}{A}$, όπου Α το εμβαδόν του εμβόλου. Όμως το υγρό είναι ασυμπίεστο, συνεπώς ο όγκος δεν άλλαξε και η δύναμη F, δεν μετακίνησε το σημείο εφαρμογή της, αλλά τότε δεν παρήγαγε έργο πάνω στο υγρό. Ή με άλλα λόγια δεν μεταφέρθηκε ενέργεια, μέσω έργου στο υγρό κατά την αύξηση της πίεσης!

Με βάση όμως το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα Q=ΔU+W και αφού το υγρό δεν αντάλλαξε ούτε θερμότητα, ούτε έργο με το περιβάλλον του, ΔU=0. Πράγμα που σημαίνει ότι η αύξηση της πίεσης, δεν συνοδεύτηκε με αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας!

Αλλά τότε δεν μπορεί η πίεση να είναι ένα μέγεθος που να εκφράζει την ενέργεια του υγρού.

Κάθε σημείο του υγρού, απέκτησε μια πίεση με τιμή $p=\frac{F}{A}$ εξαιτίας της εξωτερικής δύναμης που ασκήθηκε στο υγρό, μέσω του εμβόλου, χωρίς αυτή η πίεση να συνδέεται με κάποια ενέργεια που πήρε ή που έδωσε το υγρό.

Μήπως δεν είναι εσωτερική ενέργεια, αλλά οι δυο ποσότητες συνδέονται με κάποιον τρόπο;

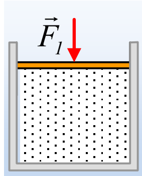
Αν έχουμε σε ένα αντίστοιχο δοχείο ένα αέριο, τότε το αέριο έχει εσωτερική ενέργεια:

$$U=\frac{3}{2}nRT=\frac{3}{2}pV$$

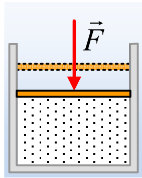
Βλέπουμε δηλαδή ότι, η εσωτερική ενέργεια (ορθότερα η θερμική ενέργεια ή η ενέργεια που συνδέεται με την άτακτη κίνηση των μορίων) να μπορεί να συνδεθεί με την πίεση του αερίου.

Γιατί να μην συμβαίνει κάτι αντίστοιχο και στα υγρά;

Ας δούμε τι ακριβώς γίνεται, αν το αρχικό δοχείο, περιείχε όχι υγρό, αλλά ένα αέριο. Το δοχείο βρίσκεται έξω από την ατμόσφαιρα και έξω από βαρυτικά πεδία.



1) Στο εσωτερικό του αερίου έχουμε πίεση, η οποία οφείλεται στην άτακτη κίνηση των μορίων. Η γνωστή μας πίεση των αερίων, την οποία μπορούμε και να υπολογίσουμε με βάση την κινητική θεωρία των αερίων! Προφανώς για να συγκρατείται το έμβολο στη θέση του, θα πρέπει να του ασκούμε μια κάθετη δύναμη $F_1=p_1 \cdot A$, όπου p_1 η πίεση του αερίου.



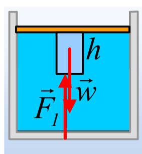
2) Αν ασκήσουμε μια εξωτερική δύναμη F στο έμβολο, μπορούμε να ***συμπιέσουμε το αέριο*** και ο όγκος να μικρύνει, με αποτέλεσμα να έχουμε αύξηση της πίεσης. Η αύξηση αυτή συνοδεύεται με αύξηση της θερμοκρασίας και της εσωτερικής ενέργειας, κατά $\Delta U=W$, όπου W το έργο της ασκούμενης δύναμης F.

Κάτι αντίστοιχο δεν έχουμε στα υγρά, τα οποία ονομάζουμε ***ασυμπίεστα***! (προφανώς ένα πραγματικό υγρό, το οποίο συμπιέζεται έστω και ελάχιστα, έχει και κάποια έστω μικρή συμπεριφορά όπως το παραπάνω αέριο…) Τα μόρια του υγρού δεν κινούνται με τεράστιες ελεύθερες διαδρομές και με ταχύτητες της τάξης των 500m/s ή 1.000m/s όπως στα αέρια, αλλά με αντίστοιχες ταχύτητες μόνο μερικών μέτρων (5m/s ή 10m/s) και σε πολύ περιορισμένο χώρο, ενώ ταυτόχρονα δέχονται και ισχυρές δυνάμεις από τα διπλανά μόρια (διαμοριακές δυνάμεις).

Έτσι η πίεση στα υγρά η οποία οφείλεται στην άτακτη κίνηση των μορίων, είναι της τάξης των μερικών Pa και την θεωρούμε αμελητέα. Στο εσωτερικό δηλαδή του υγρού, στο αρχικό μας δοχείο, πριν την άσκηση της εξωτερικής δύναμης F, η πίεση είναι μηδενική (σχεδόν).

Ναι, αλλά η υδροστατική πίεση;

Είναι άλλης μορφής πίεση αυτή; Τι ακριβώς συμβαίνει, γιατί εμφανίζεται;



Ας επιστρέψουμε στο αρχικό μας δοχείο, όπου τώρα το υγρό βρίσκεται σε βαρυτικό πεδίο (αλλά όχι με την παρουσία ατμόσφαιρας) και ας μελετήσουμε την ισορροπία μιας ποσότητας του υγρού σχήματος κυλινδρικού, βάσης Α και ύψους h, σε επαφή με το αβαρές έμβολο. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται. Το βάρος w και η δύναμη F_1 από το υγρό που έρχεται σε επαφή η βάση του κυλίνδρου. Ας ξεχάσουμε προς το παρόν* τις δυνάμεις στις παράπλευρες έδρες, που έτσι και αλλιώς αλληλοεξουδετερώνονται.

Από την ισορροπία του υγρού εντός του «νοητού κυλίνδρου» έχουμε:

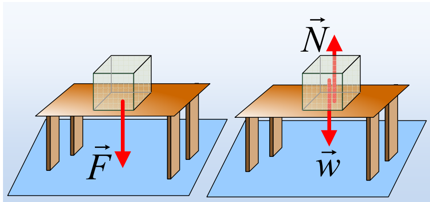
$$\vec{w}+\vec{F}_1=0 \rightarrow F_1=w=\rho g \cdot Ah$$

Αλλά τότε αφού η βάση του «νοητού κυλίνδρου» δέχεται κάθετη δύναμη από το υπόλοιπο υγρό, στα σημεία της οριζόντιας αυτής επιφάνειας, έχουμε πίεση:

$$p = \frac{F_1}{A} = \frac{\rho g A h}{A} = \rho g h$$

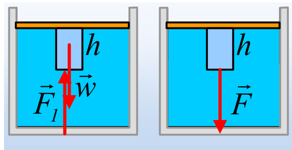
Όπου h η κατακόρυφη απόσταση των σημείων αυτών από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Αυτήν την πίεση έχουμε συνηθίσει να αποκαλούμε «υδροστατική πίεση» και οφείλεται στο βάρος του υγρού που βρίσκεται πάνω από την βάση του «νοητού κυλίνδρου» με εμβαδόν A.

Στο σημείο αυτό ας δούμε μια αναλογία, αλλά ας εκμεταλλευτώ και την περίπτωση για να πω παράλληλα και κάτι άλλο:



Πάνω σε ένα τραπέζι αφήνουμε έναν κύβο με εμβαδόν βάσης A και βάρους w. Ποιες δυνάμεις δέχεται και γιατί; Ο κύβος, τείνοντας να κινηθεί προς τα κάτω λόγω βάρους, σπρώχνει το τραπέζι, ασκώντας του μια δύναμη F, οπότε το τραπέζι ασκεί την αντίδρασή της στον κύλινδρο, την οποία έχουμε συνηθίσει να αποκαλούμε «κάθετη αντίδραση του επιπέδου N», ένα όνομα που θεωρώ πετυχημένο ή τουλάχιστον ισότιμο του ονόματος «δύναμη στήριξης». Αλλά τότε με όρους «πίεσης» ο κύβος πιέζει την επιφάνεια του τραπεζιού και η «ασκούμενη» πίεση είναι ίση με:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{w}{A}$$

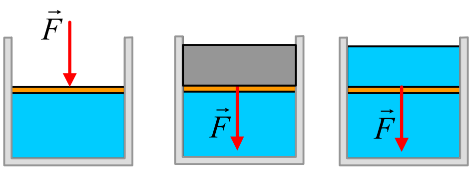


Αν βάλουμε στη θέση του παραπάνω κύβου πάνω στο τραπέζι, τον «νοητό κύλινδρο» του σχήματος, θα μπορούσαμε νομίζω να συνδέσουμε το νήμα. Ο κύβος ασκεί δύναμη $\vec{F}$ σε επιφάνεια A του τραπεζιού και ο κύλινδρος ασκεί δύναμη $\vec{F}$ σε επιφάνεια A του υγρού. Οι δυνάμεις και στις δύο περιπτώσεις είναι κατακόρυφες με φορά προς τα κάτω, με μέτρο ίσο με τα βάρη. Εξαιτίας αυτών των δυνάμεων επικρατεί πίεση στα σημεία της επιφάνειας:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\rho g A h}{A} = \rho g h$$

Αλλά αν η αναλογία είναι προφανής, μήπως θα μπορούσε να διατυπωθεί η θέση ότι:

Σε κάθε σημείο σε βάθος h, ενός υγρού, υπάρχει πίεση p=ρgh, επειδή το «αποκάτω» μέρος του υγρού, δέχεται «εξωτερική» δύναμη, από το υγρό που βρίσκεται «αποπάνω» του; Ή με άλλα λόγια:

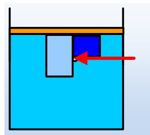


Στο πρώτο σχήμα, στο αρχικό δοχείο μας εκτός βαρυτικού πεδίου, ασκούμε στο υγρό εξωτερική δύναμη F, με αποτέλεσμα εξαιτίας της, να επικρατεί σε κάθε σημείο πίεση $p = \frac{F}{A}$. Στο δεύτερο σχήμα, εντός πεδίου βαρύτητας, τοποθετώντας πάνω στο αβαρές έμβολο ένα σώμα «πιέζουμε» το έμβολο ασκώντας του δύναμη F. Στο τρίτο σχήμα, απλά αυτό το κάνει μια ποσότητα του υγρού, που είναι πάνω από το έμβολο.

Προφανώς το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Απλά στις δυο πρώτες περιπτώσεις συνηθίζουμε να μιλάμε για «εξάσκηση εξωτερικής πίεσης» ενώ στην τελευταία περίπτωση ονομάζουμε την πίεση «υδροστατική»…

Στην πραγματικότητα σε όλες τις περιπτώσεις το υγρό δέχεται **εξωτερική** δύναμη, εξαιτίας της οποίας αναπτύσσεται πίεση (ναι, ναι και το βάρος είναι εξωτερική δύναμη για το υγρό!).

Σχόλια:

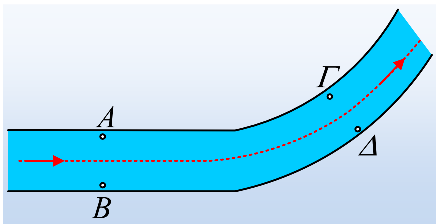


- *Από τη στιγμή που σε ένα σημείο υγρού, έχουμε μια ορισμένη τιμή πίεσης, θα ασκηθεί δύναμη σε κάθε επιφάνεια, ανεξαρτήτως προσανατολισμού, η οποία θα βρεθεί στην περιοχή. Έτσι ο «νοητός κύλινδρος» δέχεται και δυνάμεις στην πλευρική επιφάνειά του, αφού στα σημεία αυτά έχουμε πίεση που οφείλεται σε …. διπλανές στήλες υγρού, όπως στο διπλανό σχήμα…
- Αν θέλουμε τώρα, μπορούμε να βάλουμε στη συζήτηση και την ατμοσφαιρική πίεση. Δεν νομίζω ότι χρειάζεται κάτι επιπλέον να ειπωθεί. Ισοδυναμεί με άσκηση μιας επιπλέον εξωτερικής δύναμης στο υγρό μας.

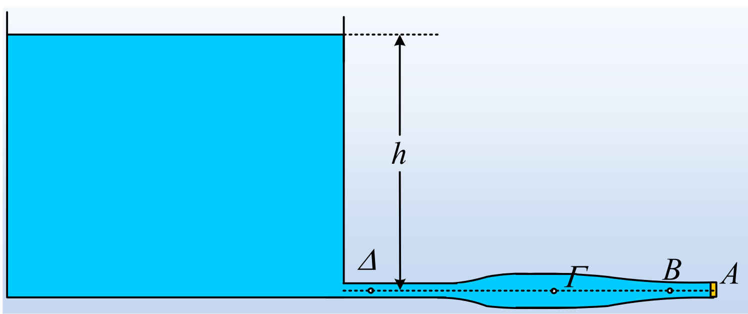
Ναι, αλλά τι γίνεται με την πίεση κατά τη ροή;

Όλα τα προηγούμενα αφορούν υγρό σε ισορροπία. Τι γίνεται όμως με τις πιέσεις κατά την ροή ενός ρευστού; Είναι ίδιας «ουσίας» η στατική πίεση ή πρόκειται για κάτι άλλο; Η διαφορά πίεσης είναι αυτή που εξασφαλίζει την ροή ή η ροή επιβάλει ορισμένες τιμές πίεσης;

Έτσι για παράδειγμα, αν έχουμε μια μόνιμη και στρωτή ροή ενός ποταμού, ποιες οι τιμές της πίεσης στα σημεία Α, Β, Γ και Δ της επιφάνειας, σε ένα οριζόντιο τμήμα της διαδρομής, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σε κάτοψη);



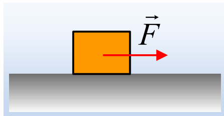
Αλλά και στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος, τι συμβαίνει με την πίεση στα σημεία Β, Γ και Δ, με κλειστό και ανοικτό το άκρο Α, όταν συνδέεται με δεξαμενή πολύ μεγάλης ελεύθερης επιφάνειας;



Πριν προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά, ας εξετάσουμε το εξής:

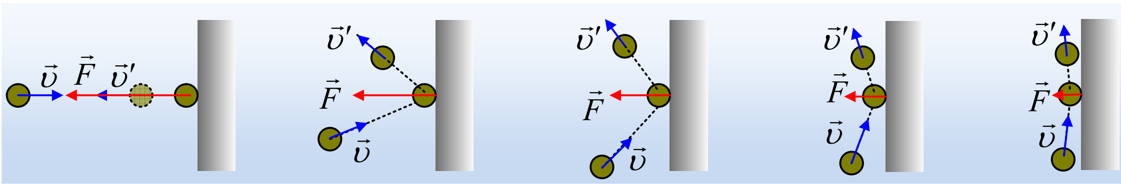
Ο μπούσουλας είναι που στρέφει ή το καράβι;

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα. Αν κάποια στιγμή ασκηθεί πάνω του μια οριζόντια δύναμη F, ο 2ος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να βρούμε την επιτάχυνση του σώματος $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ η οποία θα έχει την κατεύθυνση της ασκούμενης δύναμης.

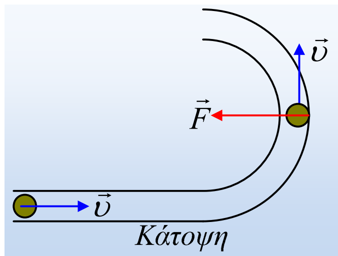


Λέμε ότι η δύναμη είναι η αιτία και η επιτάχυνση το αποτέλεσμα (και καλά κάνουμε, που το διδάσκουμε έτσι). Η δύναμη είναι αυτή που εξασφαλίζει την α ή β κίνηση ενός σώματος.

Έστω τώρα ότι σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται μια σφαίρα και προσκρούει κάθετα στον κατακόρυφο τοίχο. Λόγω της ταχύτητάς της, πέφτει στον τοίχο, του ασκεί κάποια δύναμη και η αντίδρασή της είναι αυτή που θα μεταβάλει την ταχύτητα. Αλλά και στην περίπτωση που η κρούση είναι πλάγια, το ίδιο συμβαίνει. Επειδή έχει ταχύτητα, κατά την επαφή με τον τοίχο και προκειμένου να μεταβληθεί η ταχύτητα, εξαιτίας μιας «κινηματικής συμπεριφοράς», ασκεί και δέχεται δύναμη από τον τοίχο. Ας δούμε τα σχήματα:



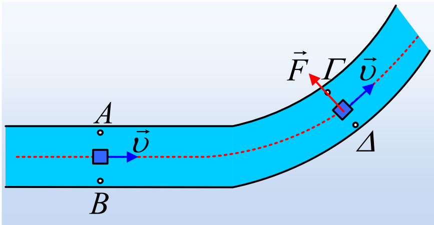
Αξίζει να παρατηρηθεί ότι αλλάζοντας την διεύθυνση της ταχύτητας, αλλάζει και η δύναμη! Όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία πρόσπτωσης, τόσο μικρότερη δύναμη ασκείται στην σφαίρα από τον τοίχο.



Αν τώρα αντί να έχουμε μια τέτοια κρούση, μια σφαίρα που κινείται οριζόντια, υποχρεωθεί κάποια στιγμή να ακολουθήσει ένα τμήμα κυκλικού οδηγού, ένα αυλάκι, όπως στο διπλανό σχήμα; Μόλις φτάσει στο κυκλικό μέρος «θα επακολουθήσει μια σειρά συνεχών κρούσεων» με το εξωτερικό τοίχωμα, με αποτέλεσμα να δέχεται διαρκώς δύναμη F, η οποία θα λειτουργεί ως κεντρομόλος και η οποία θα επιτρέψει στη σφαίρα να κινηθεί στο αυλάκι! Προφανώς η δύναμη αυτή F δεν θα έκανε την εμφάνισή της, αν η σφαίρα αφεθεί στην θέση αυτή, χωρίς να έχει ταχύτητα!

Βλέπουμε λοιπόν με βάση τα παραπάνω, ότι ενώ μια χαρά διδάσκουμε το 2^{o} νόμο και την σχέση αιτία-αποτέλεσμα, υπάρχουν περιπτώσεις, όπου η ύπαρξη της ταχύτητας επιβάλει την εμφάνιση ή μη της δύναμης (η οποία στη συνέχεια θα μεταβάλλει την ταχύτητα!).

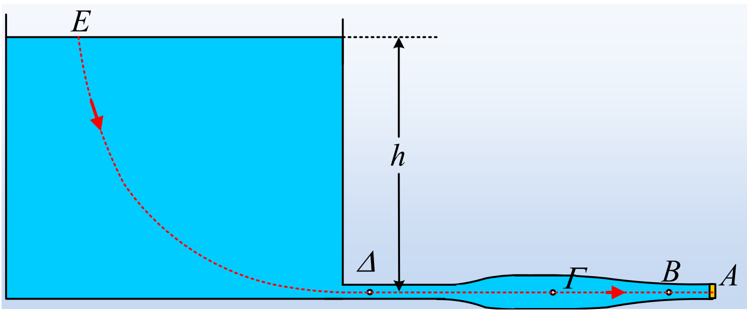
Και τώρα ας επιστρέψουμε στα ρευστά.



Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί μια ρευματική γραμμή, η οποία δείχνει την κατεύθυνση ροής στο ποτάμι. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στην διεύθυνση της ροής. Δεν πρόκειται να υπάρξει καμιά επιτάχυνση σε κάθε σωματίδιο ρευστού στη διεύθυνση ΑΒ, κάθετα δηλαδή στη διεύθυνση της ροής. Αλλά τότε δεν υπάρχει και καμιά διαφορά πίεσης μεταξύ Α και Β. Πόση είναι η πίεση αυτή; Προφανώς ίση με την ατμοσφαιρική, αφού μιλάμε για σημεία της επιφάνειας.

Αν όμως αυτά ισχύουν για τα σημεία Α και Β, δεν ισχύει το ίδιο για τα σημεία Γ και Δ. Εδώ κάθε σωματίδιο ρευστού θα πρέπει να δεχθεί κεντρομόλο δύναμη, η οποία θα του επιτρέψει να διαγράψει καμπύλη τροχιά με ακτίνα καμπυλότητας R. Μαθηματικά μπορούμε να γράψουμε $\frac{dp}{dz} = \rho\frac{\upsilon^2}{R}$ όπου $\frac{dp}{dz}$ η βαθμίδα πίεσης κατά μήκος της ΔΓ. Αλλά αυτή η βαθμίδα πίεσης αναπτύχθηκε εξαιτίας της «πρόσκρουσης» του νερού στο τοίχωμα του ποταμού στην περιοχή του σημείου Δ με αποτέλεσμα, λόγω ταχύτητας να ασκεί δύναμη στο τοίχωμα και επομένως να δέχεται και αυξημένη δύναμη από αυτό! Έτσι αν $p_Γ$=1at, τότε $p_Δ$>1at!!!

Ας έρθουμε τέλος στο δεύτερο πρόβλημα με το σωλήνα.



Με κλειστό το άκρο του σωλήνα Α έχουμε ότι:

$$p_A = p_B = p_Γ = p_Δ = p_{at} + \rho gh$$

Αν ανοίξουμε το άκρο Α θα επακολουθήσει εκροή και μάλιστα ακαριαία η πίεση στο Α θα γίνει ίση με την ατμοσφαιρική! Όταν η ροή γίνει μόνιμη θα έχουμε από το νόμο του Bernoulli, θεωρώντας το υγρό ασυμπίεστο και ιδανικό:

$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho gh = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2$$

Και δεχόμενοι ότι υ_E=0, ενώ $p_A = p_E = 1at$ παίρνουμε:

$$\rho gh = \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \rightarrow \upsilon_A = \sqrt{2gh}$$ εξίσωση Torricelli.

Εφαρμόζοντας ξανά τώρα την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουμε:

$$p_{\Delta}+\frac{1}{2}\rho \upsilon_{\Delta}^{2}=p_{\Gamma}+\frac{1}{2}\rho \upsilon_{\Gamma}^{2}=p_{B}+\frac{1}{2}\rho \upsilon_{B}^{2}=p_{A}+\frac{1}{2}\rho \upsilon_{A}^{2} \quad (1)$$

Ενώ από την εξίσωση της συνέχειας:

$$A_{\Delta}\cdot\upsilon_{\Delta}=A_{\Gamma}\cdot\upsilon_{\Gamma}=A_{B}\cdot\upsilon_{B}=A_{A}\cdot\upsilon_{A}$$

Και αφού με βάση το σχήμα, $A_{\Delta}=A_{B}=A_{A} < A_{\Gamma}$ θα έχουμε και $\upsilon_{\Delta} =\upsilon_{B}=\upsilon_{A}> \upsilon_{\Gamma}$ και από την παραπάνω εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$p_{A}=p_{B}=p_{\Delta}=p_{at}=1at \text{ ενώ } p_{\Gamma}>1at$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι η δεξαμενή (την οποία βάλαμε στο παιχνίδι για να μας «δημιουργεί την πίεση στο άκρο του σωλήνα και τελικά να προκαλεί τη ροή) ενώ είναι πάντα εκεί γεμάτη ρευστό και με πίεση στη βάση της $p_{ατ}+\rho gh$, οι πιέσεις κατά μήκος του σωλήνα στην περίπτωση της μόνιμης ροής, είναι εντελώς διαφορετικές, οι δε τιμές τους καθορίζονται από τη Γεωμετρία του σωλήνα, με αποτέλεσμα στο Γ που ο σωλήνας φαρδαίνει να έχουμε μεγαλύτερη πίεση.

Υπάρχει λόγος; Μπορούμε να εξηγήσουμε ότι ένα στοιχείο ρευστού κατά την μετακίνησή του από το Δ στο Γ, επιβραδύνεται, αφού πηγαίνει σε περιοχή μεγαλύτερης διατομής άρα και μικρότερης ταχύτητας, συνεπώς πρέπει $p_{\Delta}<p_{\Gamma}$, ενώ αντίθετα στη συνέχεια για να μεταβεί από το Γ στο Β πρέπει να επιταχυνθεί, οπότε $p_{\Gamma}>p_{B}$. Για να έχουμε τις κατάλληλες αυξομοιώσεις της ταχύτητας, το ρευστό αλληλεπιδρά με τα τοιχώματα του σωλήνα, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται μεγαλύτερη ή μικρότερη πίεση.

Όπως ακριβώς η σφαίρα αλληλεπιδρούσε με το τοίχωμα του κυκλικού αγωγού για να εξασφαλίσει την αναγκαία κεντρομόλο δύναμη!!!

dmargaris@gmail.com