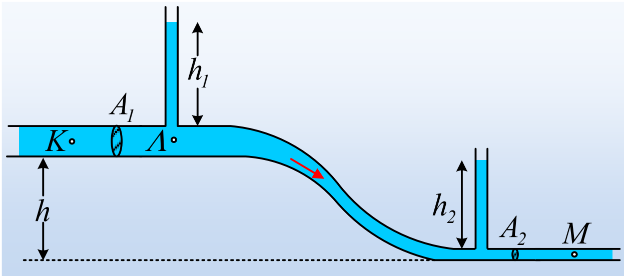
Ένα τμήμα ενός δικτύου ύδρευσης.



Στο σχήμα φαίνεται ένα τμήμα ενός δικτύου ύδρευσης με μια μόνιμη και στρωτή ροή, σταθερής παροχής 3,5L/s. Το νερό πυκνότητας ρ=1.000kg/m^3 θεωρείται ιδανικό ρευστό και τα δυο οριζόντια και σταθερής διατομής τμήματα του σωλήνα, απέχουν κατακόρυφη απόσταση h=0,5m. Οι οριζόντιοι σωλήνες έχουν διατομές A_1=70cm^2 και A_2=10cm^2, ενώ δύο λεπτοί κατακόρυφοι σωλήνες, έχουν συγκολληθεί σε αυτούς, με αποτέλεσμα το νερό να ανέρχεται στο εσωτερικό τους κατά h_1=80cm και h_2 αντίστοιχα.

i) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες ροής στους δυο οριζόντιους σωλήνες.

ii) Να υπολογιστεί η τιμή της πίεσης στα σημεία Κ και Λ.

iii) Για ένα σωματίδιο ρευστού Χ, μάζας 0,2kg, να υπολογιστεί η μεταβολή της κινητικής και η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας, μεταξύ των σημείων Κ και Μ.

iv) Να υπολογιστεί το έργο που παρήγαγε η υπόλοιπη μάζα του νερού, επί του σωματιδίου Χ, μεταξύ των παραπάνω θέσεων.

v) Να βρεθεί το ύψος h_2 στο το οποίο έχει ανέβει το νερό στον δεύτερο κατακόρυφο σωλήνα.

Δίνεται g=10m/s^2 και $p_{ατ}$=10^{5}N/m^2.

Απάντηση:

i) Η παροχή από μια διατομή του σωλήνα είναι ίση με Π=Α·υ, οπότε για τους δυο σωλήνες έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{\Pi}{A_1} = \frac{3{,}5\cdot 10^{-3}m^3/s}{70\cdot 10^{-4}m^2} = 0{,}5m/s \quad \text{και} \quad \upsilon_2 = \frac{\Pi}{A_2} = \frac{3{,}5\cdot 10^{-3}m^3/s}{10\cdot 10^{-4}m^2} = 3{,}5m/s$$

ii) Το σημείο Λ, μπορεί να θεωρηθεί σημείο στο κάτω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα, όπου το νερό ισορροπεί, δημιουργώντας μια στήλη ύψους h_1, οπότε:

$$p_\Lambda = p_{\alpha\tau} + \rho g h_1 = 10^5 N/m^2 + 1.000\cdot 10\cdot 0{,}8N/m^2 = 108.000N/m^2$$

Αλλά ο πάνω σωλήνας έχει σταθερή διατομή, συνεπώς η ταχύτητα ροής έχει σταθερή τιμή σε κάθε σημείο, δηλαδή $\upsilon_K=\upsilon_\Lambda$, οπότε εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli μεταξύ των σημείων Κ και Λ παίρνουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \rightarrow$$

$$p_K = p_\Lambda = 108.000N/m^2$$

iii) Για το σωματίδιο ρευστού Χ, θα έχουμε:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}0{,}2\left(3{,}5^2 - 0{,}5^2\right)J = 1{,}2J$$

Θεωρώντας δε, επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο του $2^{ου}$ σωλήνα, έχουμε:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -U_1 = -mgh = -0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}5J = -1J$$

iv) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σωματίδιο ρευστού Χ και έχουμε:

$$K_2 - K_1 = W_w + W_F$$

Όπου W_F το έργο της δύναμης που δέχεται το σωματίδιο από το υπόλοιπο υγρό στη διάρκεια της κίνησής του, συνεπώς αφού λάβουμε υπόψη μας ότι $W_w=-\Delta U$, έχουμε:

$$W_F = \Delta K - W_w = \Delta K + \Delta U \text{ οπότε:}$$

$$W_F = 1{,}2J - 1J = 0{,}2J$$

v) Εφαρμόζουμε ξανά το νόμο Bernoulli μεταξύ των σημείων Κ και Μ και παίρνουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho gh = p_M + \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 \rightarrow$$

$$p_M = p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 + \rho gh \rightarrow$$

$$p_M = 108.000N/m^2 + \frac{1}{2}1.000\left(0{,}5^2 - 3{,}5^2\right)N/m^2 + 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}5N/m^2 = 107.000N/m^2$$

Όμως η πίεση σε όλα τα σημεία του οριζόντιου σωλήνα, σταθερής διατομής, είναι επίσης (όπως και στον πρώτο σωλήνα) σταθερή και ίση με την πίεση στο κάτω μέρος του κατακόρυφου σωλήνα, όπου το νερό έχει ανέβει κατά h_2. Έτσι:

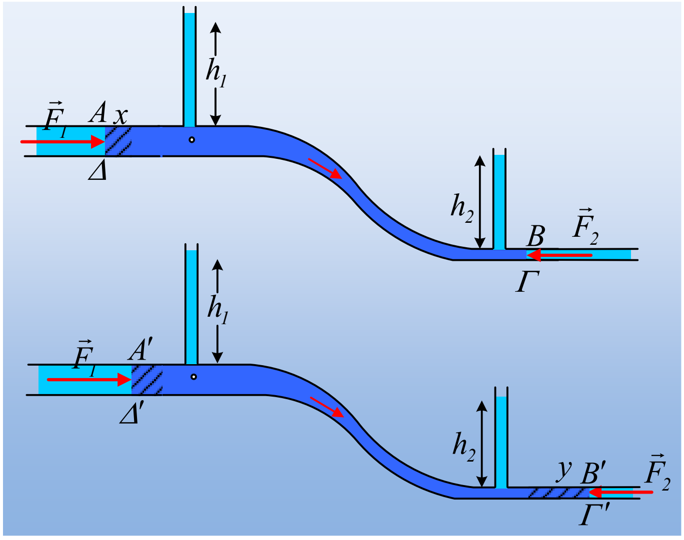
$$p_M = p_{ατ} + \rho gh_2 \rightarrow$$

$$h_2 = \frac{p_M - p_{ατ}}{\rho g} = \frac{107.000 - 100.000}{1.000 \cdot 10}m = 0{,}7m$$

Σχόλιο:

Ποιο είναι το έργο W_F, που υπολογίσαμε παραπάνω;

Έστω ότι μας ενδιαφέρει μια ποσότητα νερού, που στο παρακάτω σχήμα, καταλαμβάνει την περιοχή ΑΒΓΔ, με σκούρο μπλε χρώμα. Η μάζα αυτή του νερού δέχεται δύο δυνάμεις από το υπόλοιπο νερό, την $F_1=p_1 \cdot A_1$ και την $F_2=p_2 \cdot A_2$. Μέρος της ποσότητας αυτής του νερού, είναι μια μικρότερη μάζα m=0,2kg, η οποία αποτελεί το σωματίδιο ρευστού που μας δόθηκε, όπου στο πρώτο σχήμα είναι γραμμοσκιασμένο. Το μήκος που καταλαμβάνει στον πάνω σωλήνα, είναι x, όπου $V=A_1 \cdot x$.



Έστω μετά από λίγο, η θέση της ίδιας ποσότητας νερού, είναι αυτή του κάτω σχήματος, όπου η επιφάνεια ΑΔ, έχει φτάσει στη θέση Α΄Δ΄ μετατοπισμένη κατά x. Τότε η ΒΓ έχει μετατοπιστεί κατά y, όπου $V=A_2 \cdot y$. Μεταξύ αυτών των δύο θέσεων, τι διαφορά υπάρχει στην κίνηση του νερού; Ουσιαστικά είναι σαν η μάζα m, η γραμμοσκιασμένη στο πάνω σχήμα, να έχει φτάσει στην περιοχή που έχει γραμμοσκιαστεί στο κάτω σχήμα. Η υπόλοιπη ποσότητα του νερού, υπάρχει στον ίδιο χώρο έχοντας και ίδια ενέργεια, αφού σε κάθε σημείο η ταχύτητα παραμένει σταθερή. Συνεπώς το έργο της δύναμης που ασκήθηκε στο σωματίδιο ρευστού Χ, κατά την μετακίνησή του από τον πάνω στον κάτω σωλήνα, είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων F_1 και F_2 που ασκήθηκε σε όλη την ποσότητα του νερού ΑΒΓΔ. Δηλαδή:

$$W_F = W_{F_1} + W_{F_2} = F_1 x - F_2 y = p_1 A_1 x - p_2 A_2 y = p_1 V - p_2 V = (p_1 - p_2)V \text{ ή}$$

$$W_F = (p_1 - p_2) \cdot \frac{m}{\rho} = (108.000 - 107.000)\frac{0,2}{1.000} J = 0,2J$$

dmargaris@gmail.com