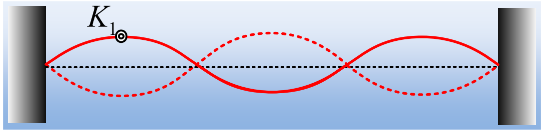
Ένα στάσιμο κύμα, δύο εξισώσεις στάσιμου.

Μια χορδή μήκους 3m έχει στερεωμένα τα δυο άκρα της. Η χορδή τίθεται σε ταλάντωση και πάνω της δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα, με μορφή όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου το πλάτος ταλάντωσης της πρώτης κοιλίας K_1 είναι 0,2m και η συχνότητά της 20Hz.



i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος της παραπάνω χορδής.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, δεχόμενοι ότι η αρχή του άξονα, είναι η θέση ισορροπίας της κοιλίας K_1, ενώ τη στιγμή t=0 το σημείο K_1 περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση).

iii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου, δεχόμενοι ως αρχή του άξονα x, το αριστερό άκρο της χορδής και την ίδια, όπως παραπάνω, στιγμή t=0.

iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου Σ το οποίο απέχει 1,25 m από το αριστερό άκρο της χορδής. Η απάντηση να δοθεί με την βοήθεια και των δύο παραπάνω εξισώσεων στάσιμου που βρήκατε.

Απάντηση:

i) Με βάση το σχήμα που δίνεται $\ell = 3\dfrac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}\ell = 2m$ όπου λ το μήκος ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος της χορδής. Αλλά τότε η ταχύτητα του παραπάνω τρέχοντος κύματος είναι:

$$\upsilon = \lambda f = 2 \cdot 20m/s = 40m/s.$$

ii) Αν στη θέση x=0 υπάρχει κοιλία η οποία τη στιγμή t=0 περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη με θετική ταχύτητα, τότε ισχύει η γνωστή μας εξίσωση του στάσιμου, που έχει το βιβλίο μας:

$$y_1 = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \rightarrow$$

$$y_1 = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(40\pi t)$$ με t ≥0 και -0,5m ≤ x ≤ 2,5m, μονάδες στο S.I.

iii) Προφανώς τώρα η ζητούμενη εξίσωση δεν είναι αυτή του βιβλίου αλλά θα είναι της μορφής:

$$y_2 = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \vartheta\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

Έτσι εφαρμόζοντάς την, για τη θέση της πρώτης κοιλίας, x=0,5m τη στιγμή t=0 παίρνουμε:

$$y_2 = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(0,5\pi + \vartheta) \cdot \eta\mu(40\pi \cdot 0 + \phi)$$

Όμως είτε $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ είτε $\theta = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) \neq 0$

Άρα ημφ=0, οπότε φ=0 ή φ=π.

Επειδή την $t=0$ η κοιλία κινείται κατά τη θετική φορά ισχύει:

$$\upsilon>0 \Rightarrow 20\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi>0 \rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)>0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi>0 \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2} \text{ και φ=0 ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)<0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi<0 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \text{ και φ=π ή}$$

Οπότε καταλήγουμε σε δύο ισοδύναμες εξισώσεις:

$$y=0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x+\frac{3\pi}{2})\eta\mu(40\pi t)(SI)$$

ή

$$y=0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x+\frac{\pi}{2})\eta\mu(40\pi t+\pi)(SI)$$

Οι οποίες οδηγούν στην

$y_2=0,2\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\eta\mu(40\pi t)$ με t ≥0 και 0 ≤ x ≤ 3m, μονάδες στο S.I.

iv) α) Με βάση την πρώτη εξίσωση που βρήκαμε, το σημείο Σ βρίσκεται στη θέση x=1,25m-0,5m=0,75m και η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα είναι:

$$y_{1/\Sigma}=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot\eta\mu(40\pi t)=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(0,75\pi)\cdot\eta\mu(40\pi t)=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu(40\pi t)\rightarrow$$

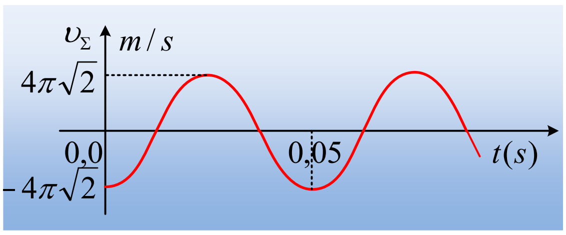
$$y_{1/\Sigma}=-0,2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\eta\mu(40\pi t)=0,1\sqrt{2}\cdot\eta\mu(40\pi t+\pi) \quad \text{(S.I.)} \quad (1)$$

Αλλά τότε η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσής του θα είναι:

$$\upsilon_{1/\Sigma}=\mathrm{A}\omega\cdot\sigma\upsilon\nu(40\pi t+\pi)=0,1\sqrt{2}\cdot 40\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(40\pi t+\pi)=4\pi\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu(40\pi t+\pi) \text{ ή}$$

$$\upsilon_{1/\Sigma}=-4\pi\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu(40\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης της ταχύτητας είναι αυτή του σχήματος:



β) Αν δεχτούμε την δεύτερη εξίσωση του στάσιμου, θα έχουμε:

$$y_{2/\Sigma} = 0{,}2 \cdot \eta\mu(1{,}25\pi) \cdot \eta\mu(40\pi t) = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu(40\pi t) \rightarrow$$

$$y_{2/\Sigma} = -0{,}2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu(40\pi t) = 0{,}2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta\mu(40\pi t + \pi) \rightarrow$$

$$y_{2/\Sigma} = 0{,}1\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40\pi t + \pi)$$

Αλλά η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση (1) που βρήκαμε και στην προηγούμενη εκδοχή. Οπότε τα πάντα από κει και πέρα είναι τα ίδια, συνεπώς η παραπάνω γραφική παράσταση ισχύει προφανώς και σε αυτήν την εκδοχή!

Συμπέρασμα;

Είναι φανερό, ότι η ταλάντωση του σημείου Σ (αλλά και κάθε σημείου), είναι μία και δεν εξαρτάται από την δική μας επιλογή του άξονα x. Η επιλογή του άξονα (συνεπώς και της αρχής του x=0) αλλάζει τη μορφή της μαθηματικής εξίσωσης, αλλά όχι και την φυσική πραγματικότητα!!!

dmargaris@gmail.com