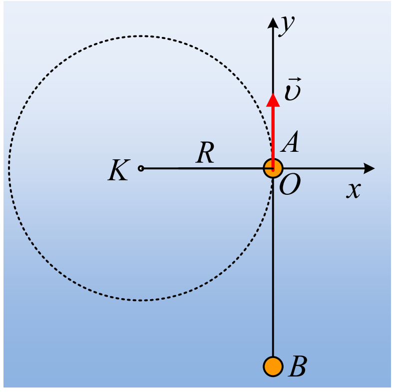
Η κυκλική κίνηση και η Γεωμετρία!



Μια μικρή σφαίρα Α μάζας εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, με περίοδο Τ=3s, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο ένα άκρο νήματος μήκους 3m, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο σε σημείο Κ. Στο σχήμα δίνεται ένα σύστημα αξόνων x,y με αρχή τη θέση Ο της σφαίρας τη στιγμή t=0. Πάνω στον άξονα y και στην θέση y=- $3\sqrt{3}$ m, ηρεμεί μια δεύτερη σφαίρα Β.

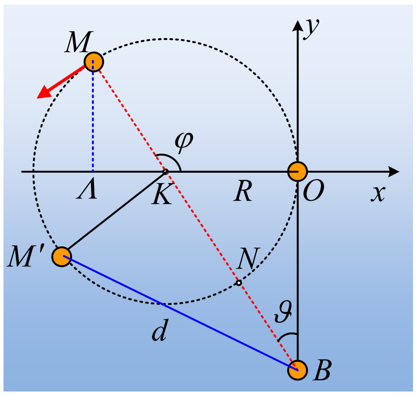
i) Ποια χρονική στιγμή, για πρώτη φορά, η απόσταση των δύο σφαιρών γίνεται μέγιστη;

ii) Να υπολογίσετε την μέγιστη απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών. Ποιες οι συντεταγμένες της θέσης της Α σφαίρας στο σύστημα αξόνων του σχήματος, τη στιγμή της μέγιστης απόστασης;

iii) Ποια χρονική στιγμή, για πρώτη φορά, η απόσταση των δύο σφαιρών γίνεται ελάχιστη; Αφού υπολογίστε την ελάχιστη απόσταση των δύο σφαιρών, να βρεθούν για τη θέση αυτή οι συνιστώσες α_x και α_y της επιτάχυνσης της Α σφαίρας.

iv) Μια χρονική στιγμή t_1, όπου 6,5s < t_3 < 8,5s, το νήμα κόβεται με αποτέλεσμα η σφαίρα Α, να συγκρουσθεί μετά από λίγο με τη Β σφαίρα. Να βρεθεί η στιγμή t_3 που κόπηκε το νήμα.

Απάντηση:



i) Η απόσταση των δύο σφαιρών γίνεται μέγιστη, όταν η σφαίρα Α φτάσει στη θέση Μ, του διπλανού σχήματος, αφού σε οποιαδήποτε άλλη θέση Μ΄ για την απόσταση d, ισχύει:

$$(M'B)=d<(KB)+(KM')\ \acute{\eta}$$

$$d<(KB)+R=(MB)$$

Όμως $(KB)=\sqrt{(BO)^2+(OK)^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+3^2}\,m=6m$

και $\eta\mu\vartheta=\dfrac{R}{(KB)}=\dfrac{1}{2}\rightarrow\hat{\vartheta}=30^o$

οπότε $O\hat{K}B=60^o$ και η γωνία που πρέπει να διαγράψει η Α σφαίρα για να φτάσει στο σημείο Μ. η γωνία φ=180°-60°=120°=$2\pi/3\ rad$. Από την κυκλική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$$\omega=\frac{\varphi}{t_1}\rightarrow t_1=\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\varphi}{\frac{2\pi}{T}}=\frac{\varphi}{2\pi}T=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}T=\frac{T}{3}=1s$$

ii) Η μέγιστη απόσταση είναι (ΒΜ)=(ΒΚ)+(ΚΜ)=6m+3m=9m.

Φέρνοντας την ΜΛ κάθετη προς τον άξονα x, η γωνία $\Lambda\hat{M}K=\hat{\vartheta}$ (εντός εναλλάξ), οπότε:

$$(\Lambda K)=R\cdot\eta\mu\theta=3m\cdot\frac{1}{2}=1{,}5m \quad \text{και} \quad (\Lambda M)=R\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=3m\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1{,}5\sqrt{3}m$$

Οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι:

$$(x,y)=\left(-3m-1{,}5m,\ \ 1{,}5\sqrt{3}m\right)=\left(-4{,}5m,\ 1{,}5\sqrt{3}m\right)$$

iii) Η ελάχιστη απόσταση των δύο σφαιρών, είναι όταν η Α σφαίρα φτάσει στο σημείο Ν, του παραπάνω σχήματος. Αλλά τότε η γωνία που έχει διαγράψει η κινούμενη σφαίρα είναι $\varphi'=2\pi-O\hat{K}B$ ή

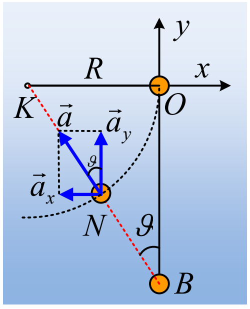
$$\varphi'=2\pi-\pi/3=5\pi/3 \text{, οπότε:}$$

$$\omega=\frac{\varphi'}{t_2}\rightarrow t_2=\frac{\varphi'}{\omega}=\frac{\varphi'}{\frac{2\pi}{T}}=\frac{\varphi'}{2\pi}T=\frac{\frac{5\pi}{3}}{2\pi}T=\frac{5T}{6}=\frac{5\cdot 3}{6}s=2{,}5s$$

Ενώ η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών, είναι ίση:

$$(NB)=(KB)-R=6m-3m=3m.$$

Η επιτάχυνση της σφαίρας, η κεντρομόλος επιτάχυνση, κατευθύνεται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς με μέτρο:



$$a_\kappa=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{4\pi^2 R}{T^2}=\frac{4\pi^2 3}{3^2}m/s^2\approx 13{,}2m/s^2.$$

Οπότε για τα μέτρα των δύο συνιστωσών της, έχουμε:

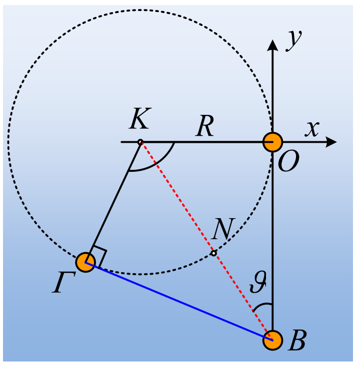
$$a_x=a_\kappa\cdot\eta\mu\vartheta=13{,}2\cdot\frac{1}{2}m/s^2=6{,}6m/s^2$$

$$a_y=a_\kappa\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=13{,}2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m/s^2=6{,}6\sqrt{3}m/s^2$$

Και με βάση το σχήμα, οι αλγεβρικές τιμές των δύο συνιστωσών, είναι:

$$a_x=-6{,}6m/s^2 \quad \text{και} \quad a_y=6{,}6\sqrt{3}m/s^2$$

iv) Μόλις κοπεί το νήμα, η σφαίρα Α θα κινηθεί στη διεύθυνση της ταχύτητας, συνεπώς σε διεύθυνση εφαπτόμενη της κυκλικής τροχιάς και θα φτάσει στην θέση της σφαίρας Β. Αλλά τότε οι ΒΟ και ΒΓ είναι και οι δύο εφαπτόμενες του κύκλου και τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΟΒ και ΚΓΒ είναι ίσα, οπότε η γωνία $\Gamma\hat{K}O=2\cdot 60^o=120^o=\frac{2\pi}{3}$.



Αλλά η στιγμή t_3 είναι μεγαλύτερη από τα 6s (2T) και μικρότερη από 9s (3T), συνεπώς η σφαίρα έχει ολοκληρώσει δύο πλήρεις περιστροφές και έχει διαγράψει γωνία:

$$\varphi_3=2\cdot 2\pi+\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{16\pi}{3}rad \text{, οπότε:}$$

$$\omega = \frac{\varphi_3}{t_3} \rightarrow t_3 = \frac{\varphi_3}{2\pi}T = \frac{\frac{16\pi}{3}}{2\pi}T = \frac{8T}{3} = \frac{8 \cdot 3}{3}s = 8s$$

dmargaris@gmail.com