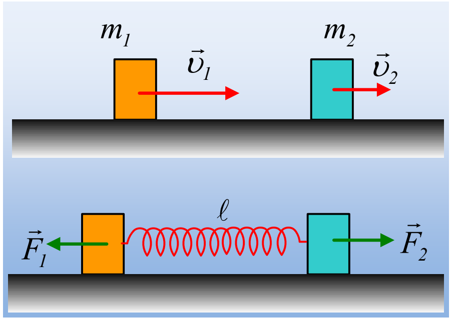
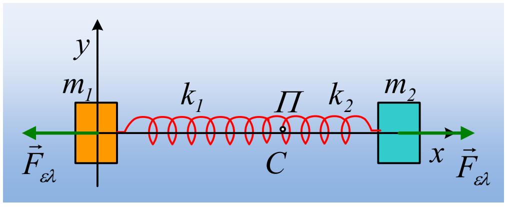
Οι μετατοπίσεις σε μια ελαστική κρούση και το cm.



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση δύο σώματα με μάζες m_1=2kg, m_2=3kg και ταχύτητες υ_1=10m/s και υ_2=5m/s. Σε μια στιγμή συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Θεωρούμε ότι η ελαστική αυτή κρούση, προσομοιάζεται με την αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων, μέσω ενός ελατηρίου, σταθεράς k=3.000N/m και φυσικού μήκους l_0=1m, όπου το ελατήριο αυτό είναι προσαρμοσμένο στο πίσω μέρος του σώματος m_2, πάνω στο άλλο άκρο του οποίου προσπίπτει το σώμα m_1.

Να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις των δύο σωμάτων στη διάρκεια της κρούσης.

Απάντηση:



Στη διάρκεια της κίνησης, ας πάρουμε έναν παρατηρητή Π, που «κάθεται» στο κέντρο μάζας C. Προφανώς πρόκειται για έναν αδρανειακό παρατηρητή, ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα:

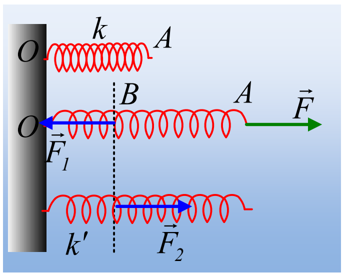
$$V_C = V_{cm} = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\cdot 10 + 3\cdot 5}{2+3} m/s = 7m/s$$

Τι βλέπει ο παρατηρητής Π τη στιγμή που αρχίζει η κρούση; Βλέπει τα δυο σώματα με ταχύτητες:

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{V}_C \text{ και } \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{V}_C \text{ ή}$$

$$\upsilon_1' = \upsilon_1 - V_C = 10m/s - 7m/s = 3m/s \text{ και } \upsilon_2' = \upsilon_2 - V_C = 5m/s - 7m/s = -2m/s$$

Ενώ αμέσως μετά, τα σώματα δέχονται δύναμη από το ελατήριο μέτρου $F_{ελ}$=k·Δl, όπως στο παραπάνω σχήμα.



Ας κάνουμε μια παρένθεση. Έστω ένα ελατήριο με φυσικό μήκος l_0 το οποίο με την επίδραση μιας δύναμης F, επιμηκύνεται κατά Δl, όπου F=k·Δl. Το τμήμα ΑΒ ισορροπεί, συνεπώς δέχεται δύναμη F_1, ίδιου μέτρου, από το τμήμα ΟΒ, όπως στο σχήμα. Βέβαια και το τμήμα ΟΒ, με αρχικό μήκος l΄ επιμηκύνεται κατά Δl΄με την επίδραση της δύναμης F_2, της αντίδρασης F_1. Αλλά αφού η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι ομοιόμορφη, θα ισχύει:

$$\Delta\ell' = \frac{\ell'}{\ell_0}\Delta\ell$$

Αλλά τότε το τμήμα ΟΒ έχει μια σταθερά k΄για την οποία ισχύει:

$$F_2 = F_1 = F \text{ ή } k'\cdot\Delta\ell' = k\cdot\Delta\ell \rightarrow$$

$$k' == k\cdot\frac{\Delta\ell}{\Delta\ell'} = k\cdot\frac{\ell_0}{\ell'}$$

Αλλά τότε ο παρατηρητής Π, ο οποίος βρίσκεται στη θέση:

$$x_C = x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{2+3} m = 0,6m$$

βλέπει το σώμα m_1 να δέχεται δύναμη $F_{ελ}$ από το τμήμα του ελατηρίου στα αριστερά του μήκους 0,6m, σταθεράς $k_1 = k \cdot \frac{\ell_0}{\ell'} = 3.000 \frac{1}{0,6} = 5.000 N/m$ και παίρνοντας το 2^o νόμο γράφει:

$$\Sigma F_1 = m_1 \cdot \alpha_1 \rightarrow -k_1 x_1 = m_1 \cdot \alpha_1$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το πρώτο σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά $D_1=k_1=5.000N/m$. Έτσι:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{5.000}{2}} = 50 rad/s$$

Ενώ το σώμα ξεκινά από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα $υ_1΄$, συνεπώς αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα, οπότε:

$$\upsilon'_1 = A_1 \omega_1 \rightarrow A_1 = \frac{\upsilon'_1}{\omega_1} = \frac{3}{50} m = 0,06m \,.$$

Αντίστοιχα το δεύτερο σώμα, θα εκτελέσει ΑΑΤ, γύρω από την «αρχική» του θέση, τη θέση του τη στιγμή που αρχίζει η κρούση, με σταθερά $k_2 = k \cdot \frac{\ell_0}{\ell_2} = 3.000 \frac{1}{0,4} = 7.500 N/m$, με κυκλική συχνότητα:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{7.500}{3}} = 50 rad/s = \omega_1$$

Και με πλάτος:

$$\upsilon'_2 = A_2 \omega_2 \rightarrow A_2 = \frac{\upsilon'_2}{\omega_2} = \frac{2}{50} m = 0,04m$$

Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης κάθε σώματος;

Για το σώμα m_1 και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, ενώ η αρχική του θέση $x_0=0$, έχουμε:

$$x_1΄ = A_1 \cdot ημ(\omega_1 t) \rightarrow x_1΄ = 0,06 \cdot ημ(50t) \quad (S.I.)$$

Αντίστοιχα το δεύτερο ταλαντώνεται γύρω από τη θέση x_{02}=1m με αρνητική αρχική ταχύτητα, οπότε:

$$x_2΄ = x_{02} + A_2 \cdot ημ(\omega_2 t + \pi) \rightarrow x_2΄ = 1 + 0,04 \cdot ημ(50t+\pi) \quad (S.I.)$$

Συνεπώς η κρούση, για τον παρατηρητή Π, διαρκεί, μέχρι τη στιγμή που κάθε «ελατήριο» θα αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος, σε χρόνο t= ½ T=$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{50} s$ (διάρκεια της κρούσης) και που τα σώματα θα έχουν επίσης ταχύτητες μέγιστου μέτρου, με τιμές $υ_1΄΄$= - 3m/s και $υ_2΄΄$=+2m/s.

Πόση είναι η μετατόπιση κάθε σώματος; Προφανώς μηδενική (π.χ. το m_1 διανύει διάστημα $s=2A_1$=0,12m επανερχόμενο στην αρχική του θέση, οπότε $\Delta x_1=0$ και αντίστοιχα μηδενικά είναι και τα έργα των ασκούμενων δυνάμεων $W_{F_1} = U_{αρχ} - U_{τελ} = 0$).

Τι βλέπει ο ακίνητος παρατηρητής;

Τα σώματα βρίσκονται κάθε στιγμή στις θέσεις:

$$x_1=x_1'+\upsilon_C\cdot t=7t+0{,}06\cdot \eta\mu(50t) \quad (S.I.)$$

$$x_2=x_2'+\upsilon_C\cdot t=7t+1-0{,}04\cdot \eta\mu(50t\pi) \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε τη στιγμή που ολοκληρώνεται η κρούση $t=\frac{\pi}{50}s$ τα σώματα βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_1=\frac{7\pi}{50}m \ \text{ και } \ x_2=1+\frac{7\pi}{50}m$$

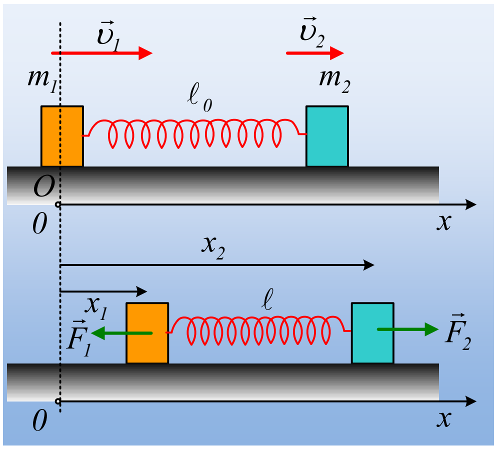
Έχοντας μετατοπισθεί κατά:

$$\Delta x_1=\frac{7\pi}{50}m-0=\frac{7\pi}{50}m \ \text{ και } \ \Delta x_2=1+\frac{7\pi}{50}m-1=\frac{7\pi}{50}m$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι οι μετατοπίσεις των δύο σωμάτων είναι ίσες.

Παράρτημα:

Ας δούμε τι κάνει συνολικά το σύστημα, από μια άλλη πλευρά:



Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει τα δυο σώματα, σε μια τυχαία θέση κατά τη διάρκεια της κρούσης, να απέχουν κατά x_1 και x_2 από το σημείο Ο, τη θέση του σώματος m_1 τη στιγμή που «αρχίζει η κρούση . Προφανώς:

$$x_2-x_1=\ell=\ell_o-\Delta\ell=\ell_o-x.$$

όπου x η συσπείρωση του ελατηρίου.

Εφαρμόζουμε για κάθε σώμα το 2^o νόμο του Νεύτωνα και παίρνουμε:

$$-kx=m_1\cdot\alpha_1 \ (1)$$

$$+kx=m_2\cdot\alpha_2 \ (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με m_2 και την (2) με m_1 και με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$-k(m_1+m_2)x=m_1m_2(\alpha_1-\alpha_2) \ \text{ή}$$

$$m_1m_2\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)+(m_1+m_2)kx=0$$

Αλλά $x_2-x_1=\ell_o-x \rightarrow \frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}=-\frac{dx}{dt}\rightarrow\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\rightarrow$

$$m_1m_2\frac{d^2x}{dt^2}+(m_1+m_2)kx=0 \ \text{ή}$$

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

Θέτοντας τώρα $\mu=\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, όπου μ η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος παίρνουμε:

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, είναι της ίδιας μορφής με τη γνωστή μας εξίσωση που περιγράφει την ΑΑΤ, οπότε κατά αναλογία θα έχουμε:

$$x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$$

όπου Α η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, που στην περίπτωσή μας είναι η συσπείρωση τη στιγμή που τα σώματα έχουν ίσες ταχύτητες:

Αλλά από την Α.Δ.Ο. παίρνουμε:

$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=(m_1+m_2)V\rightarrow$$

$$V=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}=\frac{2\cdot 10+3\cdot 5}{2+3}m/s=7m/s$$

ενώ από ΑΔΜΕ:

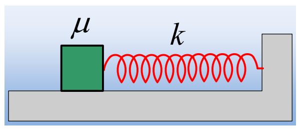
$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell_{max}\right)^2\rightarrow\ \Delta\ell=0{,}1m$$

Και $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}=\sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}=\sqrt{\dfrac{3.000\cdot 5}{6}}rad/s=50rad/s$

Ενώ για t=0, x=0, οπότε $\varphi_0=0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$x=0{,}1\cdot\eta\mu\left(50t\right)\ \text{(S.I.)}$$

Παρατηρούμε δηλαδή το ελατήριο να συσπειρώνεται και να αποσυμπιέζεται αρμονικά με το χρόνο, όπως θα το έκανε, αν το ένα του άκρο ήταν σταθερό και στο άλλο του άκρο υπήρχε υποθετικό σώμα, με μάζα ίση με την **ανηγμένη μάζα** του συστήματος:



$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=1{,}2kg\ .$$

Αξίζει να τονισθεί ότι 0,1m είναι συνολικά η μεταβολή μήκους του ελατηρίου, ίση με το άθροισμα A_1+A_2 που βρήκαμε αρχικά, ενώ η κυκλική συχνότητα ω μεταβολής του μήκους του, είναι ίδια με αυτές που υπολογίσαμε για κάθε σώμα χωριστά, όπως το βλέπει ο κινούμενος παρατηρητής…

dmargaris@gmail.com