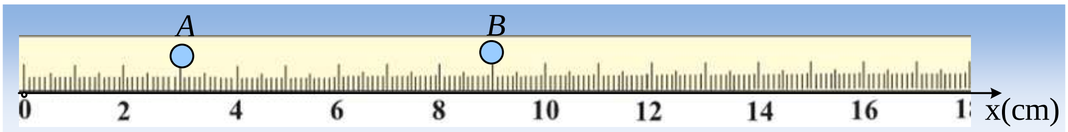
Ομαλή κυκλική κίνηση.

Ένα φύλλο εργασίας, σαν θεωρία.

1) Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα και τη στιγμή t=0, περνά από το σημείο Α και τη στιγμή t_1=2s φτάνει στο σημείο Β, όπως στο σχήμα. Για να καθορίσουμε τις θέσεις του σώματος, ορίζουμε έναν άξονα x με αρχή το σημείο Ο και την κατεύθυνση προς τα δεξιά ως θετική.



Με βάση τον άξονα αυτό, απαντάμε ότι:

i) Τη στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_0=3cm, ενώ τη στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση x_1=9cm. Η μετατόπιση του σώματος είναι ίση με $\Delta x = x_2 - x_1$=6cm.

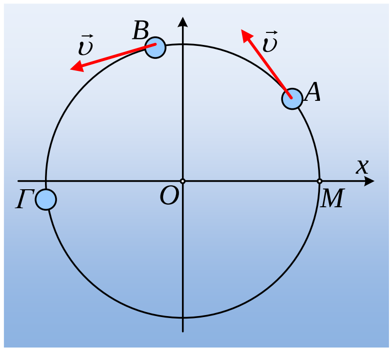
ii) Η ταχύτητα του σώματος έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, με τιμή $\upsilon = \Delta x/\Delta t = +\ 3cm/s$. .

iii) Ποια η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t_2=5s;

$$\Delta x = x - x_0 = \upsilon \cdot \Delta t \rightarrow x = x_0 + 3t \rightarrow$$

Για t_2=5s παίρνουμε $x_2 = 3cm + 3\cdot 5cm = 18cm$.

2) Ένα μικρό σώμα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, διαγράφοντας την κυκλική τροχιά του σχήματος ακτίνας R=4m. Τη στιγμή t=0, το σώμα περνά από το σημείο Α και τη στιγμή t_1=2s φτάνει στο σημείο Β.



i) Να σχεδιάστε στο σχήμα την ταχύτητα στη θέση Α.

ii) Θέλοντας να μελετήσουμε την κίνηση του σώματος, ορίζουμε ένα σημείο, έστω το σημείο Μ του άξονα x του σχήματος, ως αρχή μέτρησης του τόξου, οπότε αν το μήκος του τόξου (ΜΑ)=3m και (ΜΒ)=7m, τότε το σώμα διανύει τόξο μήκους Δs=(ΑΒ)=4m, ενώ η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $\upsilon = \Delta s/\Delta t = 4m/2s = 2m/s$.

iii) Τη στιγμή t_1=5s, που βρίσκεται το σώμα;

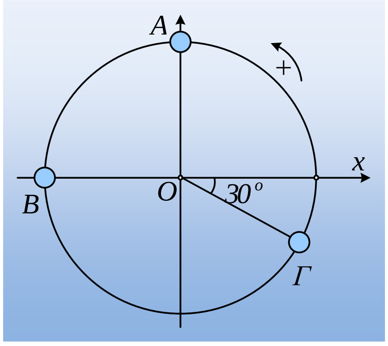
Το μήκος του τόξου που διανύει το σώμα από 0-5s είναι $\Delta s = \upsilon \cdot \Delta t = 2\cdot 5m = 10m$, πράγμα που σημαίνει ότι έχει φτάσει στο σημείο Γ, όπου το μήκος του τόξου ΑΓ είναι 10m, οπότε το τόξο ΒΓ έχει μήκος 6m.

Αν λάβουμε υπόψη ότι το μήκος του κύκλου είναι $s = 2\pi R = 2\cdot 3{,}14\cdot 4m \approx 25m$, τα 6m είναι περίπου ίσα με το ¼ του κύκλου και το σημείο Γ βρίσκεται στη θέση του παραπάνω σχήματος…

3) Ο παραπάνω τρόπος δεν είναι και πολύ ευκολόχρηστος για τον προσδιορισμό της θέσης του σώματος. Επιλέγουμε να δουλέψουμε με την χρήση γωνιών. Αλλά και πάλι, πρέπει να αποφασίσουμε την αρχή μέτρησης των γωνιών και μια θετική φορά διαγραφής. Ορίζουμε σαν αρχή μέτρησης των γωνιών τον θετικό ημιάξονα Οx και θετική φορά, την αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Με βάση αυτά, οι γωνιακές θέσεις των τριών μικρών σφαιρών του σχήματος είναι:

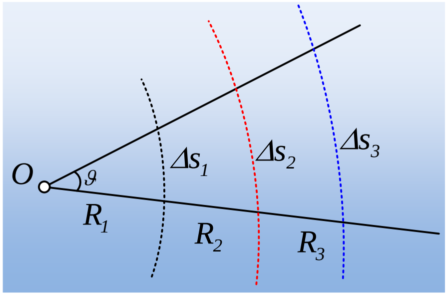
$\varphi_1 = 90°$, $\varphi_2 = 180°$, $\varphi_3 = 330°$.



iv) Με βάση την παραπάνω σύμβαση η γωνία που έχει σημειωθεί στο σχήμα, αν κινηθούμε με την φορά των δεικτών του ρολογιού, είναι ίση με -30^o. Ποια είναι στην περίπτωση αυτή η γωνιακή θέση της Β σφαίρας;

$\theta_B = -180^o$.

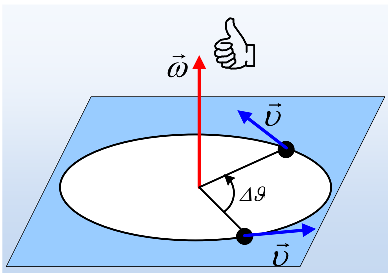
4) Έστω η γωνία του διπλανού σχήματος. Με κέντρο την κορυφή Ο, χαράσσουμε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες R_1, R_2 και R_3. Το πηλίκο $\frac{\Delta s}{R}$ παραμένει σταθερό και μας δίνει την γωνία θ. Αν το μήκος του τόξου $\Delta s_1 = R_1$, τότε λέμε ότι η γωνία θ είναι ίση με ένα ακτίνιο και γράφουμε θ=1rad. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι το μήκος του κύκλου είναι 2πR, τότε η γωνία των 360° είναι ίση με $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ rad. Με βάση αυτά, να συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα για τις γωνιακές θέσεις των τριών σφαιρών της ερώτησης 3).



σφαίρα	***φ (°)***	***φ(rad)***
Α	90°	$\frac{\pi}{2}$
Β	180°	π
Γ	330°	$\frac{11\pi}{6}$

5) Για να μελετήσουμε μια κυκλική κίνηση ορίζουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος, τη γωνιακή ταχύτητα, το οποίο είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς στο κέντρο του κύκλου, με μέτρο:

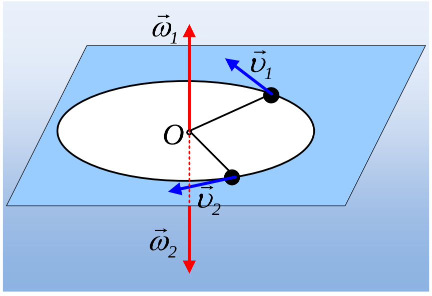
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



Όπου Δθ η γωνία που διαγράφει μια ακτίνα το άκρο της οποίας δίνει τη θέση του σώματος κάθε στιγμή (επιβατική ακτίνα) και Δt το αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Η φορά της γωνιακής ταχύτητας καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού, όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

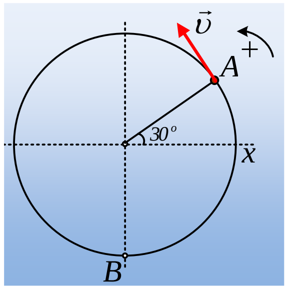
i) Σε μια οριζόντια κυκλική τροχιά κινούνται δυο μικρές σφαίρες, όπως στο σχήμα. Να σχεδιάστε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα των γωνιακών ταχυτήτων των δύο σφαιρών, αν τα μέτρα τους είναι

ω_1=3rad/s και ω_2=4rad/s.



ii) Θεωρώντας θετική φορά περιστροφής την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, οι σφαίρες έχουν γωνιακές ταχύτητες με αλγεβρικές τιμές ω_1=+3rad/s και ω_2=-4rad/s.

6) Μια μικρή σφαίρα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, στην κυκλική τροχιά του διπλανού σχήματος ακτίνας R= 2m και σε μια στιγμή t=0 περνά από τη θέση Α.



i) Αν $\omega = +\frac{\pi}{3} rad/s$:

α) Να σχεδιάστε στο σχήμα την ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή t=0. Η αρχική γωνιακή θέση της σφαίρας είναι θ_o=π/6 rad.

β) Να υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας και την περίοδο περιστροφής.

Για μια πλήρη περιστροφή της σφαίρας θα έχουμε:

$$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \quad (1) \quad \text{και} \quad \omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad (2) \quad \rightarrow \quad \upsilon=\omega R \quad (3)$$

Οπότε $\upsilon=\omega R= \frac{\pi}{3}\cdot 2m/s = \frac{2\pi}{3} m/s \approx 2{,}1 m/s$

Και από την (2) $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/3} s = 6s$

γ) Να βρεθεί η γωνιακή μετατόπιση και η θέση της σφαίρας τη στιγμή t_1 =2s.

$$\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \rightarrow \Delta\vartheta = \omega\cdot\Delta t \rightarrow \vartheta - \vartheta_0 = \omega t \rightarrow \vartheta = \vartheta_0 + \omega t \quad (4)$$

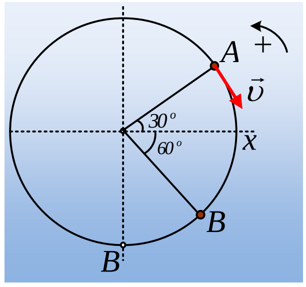
$$\Delta\vartheta = \frac{\pi}{3}\cdot 2rad = \frac{2\pi}{3} rad \quad \text{και} \quad \vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta = \frac{\pi}{6} rad + \frac{2\pi}{3} rad = \frac{5\pi}{6} rad$$

δ) Ποια χρονική στιγμή η σφαίρα περνά από το σημείο Β για τρίτη φορά;

Η θέση της σφαίρας τη στιγμή που περνάει για 3^{η} φορά από το Β είναι $\vartheta = \frac{3\pi}{2} rad + 2\cdot 2\pi\, rad = \frac{11\pi}{2} rad$ και από την σχέση (4) παίρνουμε:

$$t = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\omega} = \frac{\frac{11\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}} s = 16s$$

ii) Αν $\omega = -\frac{\pi}{3} rad/s$ να βρεθεί η γωνιακή θέση τη στιγμή t_2=1,5s.

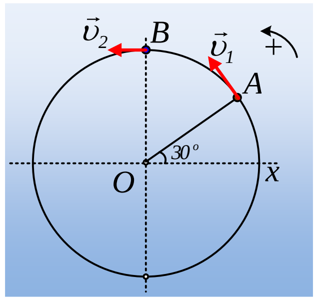


Ξανά από την σχέση (4) παίρνουμε:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega t = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}1{,}5\right) rad = -\frac{\pi}{3} rad$$

Η σφαίρα έχει φτάσει στο σημείο Β του σχήματος.

7) Δυο μικρές σφαίρες Α και Β κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας R=2m, και τη στιγμή t_0=0, βρίσκονται στις θέσεις του διπλανού σχήματος, με ταχύτητες σταθερών μέτρων $\upsilon_1 = \frac{\pi}{5} m/s$ και $\upsilon_2 = \frac{\pi}{6} m/s$.



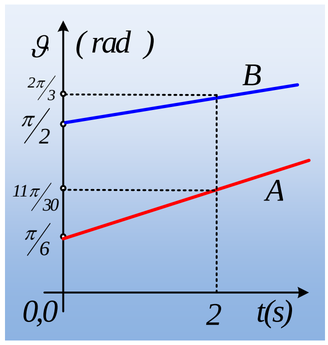
i) Ποιες οι αρχικές (γωνιακές) θέσεις των σφαιρών;

$$\vartheta_{01} = \frac{\pi}{6} rad \quad \text{και} \quad \vartheta_{02} = \frac{\pi}{2} rad$$

ii) Να υπολογίστε τις γωνιακές ταχύτητες των σφαιρών.

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_1}{R} = \frac{\frac{\pi}{5}}{2} rad/s = \frac{\pi}{10} rad/s \quad (5) \text{ και } \quad \omega_2 = \frac{\upsilon_2}{R} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2} rad/s = \frac{\pi}{12} rad/s$$

iii) Να γράψετε την εξίσωση θ=f(t) της θέσης κάθε σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις τους, στους ίδιους άξονες.



$$\vartheta_1 = \vartheta_{01} + \omega_1 t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10} t \ \text{(S.I.)} \quad \text{και}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_{02} + \omega_2 t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} t \ \text{(S.I.)}$$

iv) Ποια χρονική στιγμή η Α σφαίρα θα φτάσει την Β και σε ποια θέση θα συμβεί αυτό;

Τη στιγμή που η Α σφαίρα θα φτάσει την Β, $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ή

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10} t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} t \rightarrow \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) t = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \rightarrow$$

$$t = 20 s$$

Με αντικατάσταση στην (5) παίρνουμε:

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10} t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10} \cdot 20 = 2\pi + \frac{\pi}{6} \ \text{rad}$$

Δηλαδή η συνάντηση θα γίνει στην αρχική θέση της Α σφαίρας.

dmargaris@gmail.com