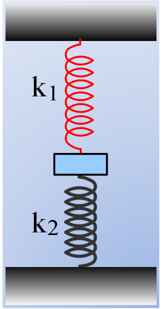
Εξασκούμαι με τη δυναμική της ταλάντωσης.

Ένα σώμα μάζας 2kg είναι δεμένο στα άκρα δύο κατακόρυφων ελατηρίων, όπως στο σχήμα και ισορροπεί, έχοντας επιμηκύνει το πάνω ελατήριο κατά 10cm. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 20cm και το αφήνουμε να κινηθεί, τη στιγμή t=0. Αν δίνονται οι σταθερές των ελατηρίων k_1=200N/m και k_2=600N/m, ενώ g=10m/s^2, ζητούνται;



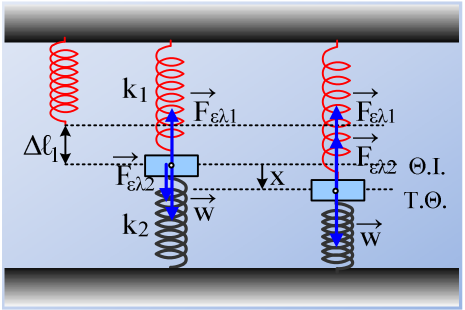
i) Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα εκτελέσει ΑΑΤ και να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση θετική.

iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός με τον οποίο το κάτω ελατήριο προσφέρει ενέργεια στο σώμα τη χρονική στιγμή $t_1=7\pi/80$ s

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, στη θέση ισορροπίας και σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας. Τι συμβαίνει με το κάτω ελατήριο στην θέση ισορροπίας; Δεν γνωρίζουμε αν έχει επιμηκυνθεί ή συσπειρωθεί, οπότε ας υποθέσουμε ότι έχει επιμήκυνση, συνεπώς ασκεί την δύναμη $F_{ελ2}$ στο σώμα, με φορά προς τα κάτω.



i) Στη θέση ισορροπίας ΣF=0 ή $F_{ελ1}=F_{ελ2}+w$ ή

$$F_{ελ2}=k_1\cdot\Delta\ell_1-mg=200\cdot 0{,}1N-2\cdot 10N=0 \quad (1)$$

Δηλαδή στην θέση ισορροπίας το κάτω ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του.

Στην τυχαία θέση έχουμε:

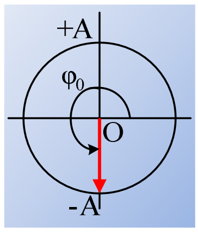
$$\Sigma F=w-F_{ελ1}-F_{ελ2}=mg-k_1(\Delta\ell_1+x)-k_2x=mg-k_1\Delta\ell_1-k_1x-k_2x\xrightarrow{(1)}$$

$$\Sigma F=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)\cdot x$$

Άρα το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$ και περίοδο:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{200+600}}s=0{,}1\pi \text{ s}$$

ii) Τη στιγμή t=0, που το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του, βρίσκεται στην ακραία αρνητική απομάκρυνσή του, από την οποία ξεκινά με μηδενική ταχύτητα. Συνεπώς Α=0,2m.



Εξάλλου με βάση το κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης, η αρχική του φάση θα είναι $\varphi_0=\frac{3\pi}{2}$ rad, ενώ $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0{,}1\pi}rad/s=20rad/s$. Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

iii) Ο ρυθμός με τον οποίο το ελατήριο προσφέρει ενέργεια στο σώμα εκφράζεται από την ισχύ της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F_{\varepsilon\lambda} dx\sigma\upsilon\nu a}{dt} = F_{\varepsilon\lambda}\upsilon\sigma\upsilon\nu a$$

όπου $F_{\varepsilon\lambda}$ το **μέτρο** της δύναμης, υ το **μέτρο** της ταχύτητας του σώματος και α η γωνία μεταξύ της δύναμης και της ταχύτητας.

Αλλά τη στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση:

$$x = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}2\eta\mu\left(20\frac{7\pi}{80} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}2\eta\mu\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}2\eta\mu\left(\frac{13\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$\mathrm{x} = 0{,}2\eta\mu\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}2\frac{\sqrt{2}}{2}m = -0{,}1\sqrt{2}m$$

Οπότε το κάτω ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά x και ασκεί δύναμη προς τα πάνω με **μέτρο**

$F_{\varepsilon\lambda}=k_2\Delta\ell_2$ ή

$$F_{\varepsilon\lambda} = 600 \cdot 0{,}1\sqrt{2}N = 60\sqrt{2}N$$

Εξάλλου το σώμα έχει ταχύτητα:

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) = 4\sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) = -4\frac{\sqrt{2}}{2}m/s = -2\sqrt{2}m/s$$

Δηλαδή με **μέτρο** $2\sqrt{2}m/s$ και φορά προς τα κάτω. Αλλά τότε η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητα είναι α=180° και παίρνουμε:

$$P = F_{\varepsilon\lambda}\upsilon\sigma\upsilon\nu a = 60\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (-1)J/s = -240J/s$$

Η αρνητική τιμή του παραπάνω ρυθμού σημαίνει ότι τη στιγμή αυτή το ελατήριο δεν δίνει ενέργεια στο σώμα, αλλά του αφαιρεί ενέργεια, με ρυθμό 240J/s.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης