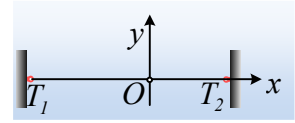


Ένα στάσιμο κύμα ανάμεσα σε δυο σταθερά σημεία.

Μεταξύ δύο σταθερών σημείων T_1 και T_2 βρίσκεται ένα γραμμικό ελαστικό μέσο, μήκους $l=3\text{m}$, στο οποίο έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Ένα σημείο O του ελαστικού μέσου απέχει κατά $1,3\text{m}$ από το δεξιό άκρο T_2 και το λαμβάνουμε ως αρχή ενός συστήματος αξόνων (x,y) . Με βάση αυτό το σύστημα αξόνων, το στάσιμο κύμα μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:



$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t + \vartheta_0\right) \quad (1)$$

όπου τη στιγμή $t=0$, το σημείο O βρίσκεται σε απομάκρυνση $y=-0,1\text{m}$ με μηδενική ταχύτητα. Εξάλλου σε χρονικό διάστημα $\Delta t=0,4\text{s}$ το O εκτελεί δυο πλήρεις ταλαντώσεις, ενώ η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά μια κοιλία του μέσου έχει μέτρο $v_{\max}=2\pi \text{ m/s}$.

- i) Να βρεθεί η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας του μέσου.
- ii) Ποιες οι δυνατές τιμές της γωνίας φ_0 που περιλαμβάνεται στην παραπάνω εξίσωση;
- iii) Αν $\varphi_0=\pi/3 \text{ rad}$ να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος κατά μήκος του μέσου αυτού, αν μεταξύ του σημείου O και του σημείου πρόσδεσης T_2 υπάρχουν δύο σημεία του μέσου που παραμένουν ακίνητα.
- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.
- v) Να παρασταθούν στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1=0$ και $t_2=0,125 \text{ s}$, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Απάντηση:

- i) Η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{2}{0,4} \text{ Hz} = 5 \text{ Hz}$$

Ενώ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης μιας κοιλίας είναι $v_{\max}=\omega \cdot A'$, όπου $A'=2A$, οπότε:

$$A' = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max}}{2\pi f} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 5} \text{ m} = 0,2 \text{ m}$$

- ii) Τη στιγμή $t=0$, το σημείο O , βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης, αφού έχει μηδενική ταχύτητα, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης του είναι $A_0=0,1\text{m}$. Όμως το πλάτος αυτό είναι ίσο με:

$$A_0 = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \right| \rightarrow 0,1 = \left| 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot 0}{\lambda} + \varphi_0\right) \right| \rightarrow$$

$$\left| \sigma\upsilon\nu(\varphi_0) \right| = \frac{1}{2} \rightarrow \sigma\upsilon\nu(\varphi_0) = \pm \frac{1}{2}$$

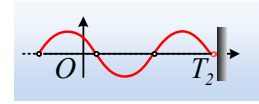
Αλλά τότε οι δυνατές τιμές της γωνίας φ_0 είναι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}, \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_0 = \frac{4\pi}{3} \text{ και } \varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$$

iii) Παίρνοντας την εξίσωση του πλάτους και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varphi_0 = \pi/3$ έχουμε για τους δεσμούς:

$$A = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \right| \rightarrow 0,2 \cdot \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} + \frac{\pi}{3}\right) \right| = 0$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{6}\right)\lambda$$



Για $k=0$, έχουμε τον πρώτο δεσμό δεξιά του O, για $k=1$, τον δεύτερο και για $k=2$, τον τρίτο. Με βάση το διπλανό σχήμα το άκρο T_2 αντιστοιχεί στον τρίτο δεσμό δεξιά του O, οπότε:

$$x = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{6}\right)\lambda = \frac{13}{12}\lambda \rightarrow \lambda = \frac{12}{13}x = \frac{12}{13}1,3\text{m} = 1,2\text{m}$$

Αλλά τότε $v = \lambda f = 1,2 \cdot 5\text{m/s} = 6\text{m/s}$.

iv) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος τα δεδομένα για το σημείο O, $x=0$ και $t=0$, παίρνουμε:

$$-0,1 = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot 0}{\lambda} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu(2\pi f \cdot 0 + \vartheta_0) \rightarrow \eta\mu\vartheta_0 = -1 \rightarrow \vartheta_0 = \frac{3\pi}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{1,2} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

v) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση του κύματος $t_1=0$, παίρνουμε τις απομακρύνσεις όλων των σημείων του μέσου την παραπάνω χρονική στιγμή:

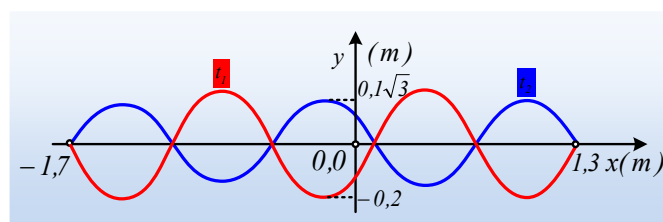
$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi \cdot 0 + \frac{3\pi}{2}\right) = -0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ με } -1,7\text{m} \leq x \leq 1,3\text{m}$$

Με γραφική παράσταση, το **κόκκινο** διάγραμμα στο παρακάτω σχήμα.

Αντίστοιχα τη στιγμή $t_2=0,125$ s παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi \cdot 0,125 + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,1\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ με } -1,7\text{m} \leq x \leq 1,3\text{m}$$



Με γραφική παράσταση το **μπλε** διάγραμμα στο παραπάνω σχήμα.

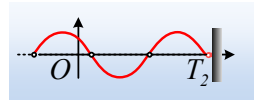
Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να ακολουθήσουμε την εξής πορεία για τον υπολογισμό του μήκους κύματος. Παίρνοντας την εξίσωση του πλάτους και αντικαθιστώντας $x=1,3\text{m}$, παίρνουμε το πλάτος του σημείου πρόσδεσης T_2 , το οποίο παραμένει ακίνητο (δεσμός του στάσιμου κύματος).

$$A_{T_2} = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \right| \rightarrow 0 = \left| 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot 1,3}{\lambda} + \frac{\pi}{3}\right) \right| \rightarrow$$

$$\frac{2,6\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2,6}{\lambda} = k + \frac{1}{6} \rightarrow \lambda = \frac{15,6}{6k+1} \quad \text{με } k \in Z \quad (2)$$

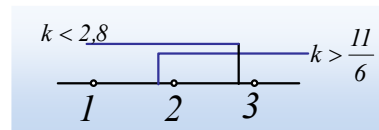
Όμως μεταξύ του O και του άκρου T_2 υπάρχουν δύο δεσμοί, όπως στο διπλανό σχήμα. Η απόσταση όμως δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\lambda/2$, οπότε για την απόσταση $OT_2=x$, θα ισχύει:



$$2\frac{\lambda}{2} < x < 3\frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda < 1,3\text{m} \quad \text{και} \quad \lambda > 0,87$$

οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\begin{cases} \frac{15,6}{6k+1} < 1,3 \rightarrow 6k+1 > 12 \rightarrow k > \frac{11}{6} \quad \text{και} \\ \frac{15,6}{6k+1} > 0,87 \rightarrow 6k+1 < 17,9 \rightarrow k < 2,8 \end{cases}$$



Οι παραπάνω ανισότητες δίνουν κοινή ακέραια λύση $k=2$, οπότε από την (2):

$$\lambda = \frac{15,6}{6k+1} = \frac{15,6}{6 \cdot 2 + 1} = 1,2\text{m}$$

Θα μπορούσαμε βέβαια, να αποφύγουμε την εύρεση της τιμής του ακεραίου k , ερευνώντας απευθείας την κατάλληλη τιμή. Έτσι από τη σχέση $\lambda = \frac{15,6}{6k+1}$ δίνοντας ακέραιες τιμές στο k , θα έχουμε:

Για $k=0$, $\lambda=15,6\text{m}$, για $k=1$ $\lambda=2,2$, για $k=2$ $\lambda=1,2\text{m}$ και για $k=3$ $\lambda=0,82\text{m} \dots$

Οπότε με βάση τον περιορισμό ότι $\lambda < 1,3\text{m}$ και $\lambda > 0,87$, επιλέγουμε την τιμή $\lambda=1,2\text{m}$.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης