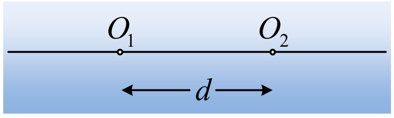
Δύο κύματα στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσον.



Σε δύο σημεία O_1 και O_2, τα οποία απέχουν απόσταση (O_1O_2)=d=4m, ενός άπειρου γραμμικού ελαστικού μέσου, υπάρχουν δυο πηγές κύματος, οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται τη στιγμή t_0=0 ταυτόχρονα, προς την θετική κατεύθυνση, με αποτέλεσμα να δημιουργούν κύματα με πλάτος 0,4m και με συχνότητα 1Hz. Τα κύματα που δημιουργούνται διαδίδονται και προς τις δύο κατευθύνσεις με ταχύτητα 2m/s, χωρίς αποσβέσεις. Θεωρούμε τη θέση O_1 ως αρχή του άξονα x και μας απασχολεί το τι συμβαίνει δεξιά της πηγής O_1 (x>0).

i) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που διαδίδονται κατά μήκος του μέσου.

ii) Να σχεδιάστε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή t_1=0,75s.

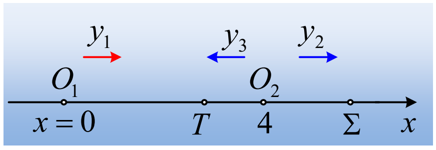
iii) Να σχεδιάστε επίσης τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές:

A) t_2=3s και

B) t_3=3,25s.

Απάντηση:

i) Στην περιοχή που μας ενδιαφέρει (x>0) διαδίδονται 3 κύματα, όπως σημειώνονται στο διπλανό σχήμα. Το κύμα από τη πηγή O_1 που διαδίδεται προς τα δεξιά με εξίσωση:



$$y_1 = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right) = 0{,}4\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right) \text{ (S.I.) με } t\geq 0 \text{ και } x\leq 2t \quad (1)$$

Το κύμα, από την πηγή O_2 με κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπου αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο Σ στη θέση x, το οποίο απέχει κατά s από την πηγή του, θα έχουμε:

$$y_2 = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{s}{\upsilon}\right) = 0{,}4\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x-4}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0{,}4\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}+2\right) \text{(S.I.) με } t\geq 0 \text{ και } 4\leq x\leq 4+2t \quad (2)$$

Τέλος το κύμα από την πηγή O_2 το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά, όπου για το τυχαίο σημείο Τ, στη θέση x θα ισχύει:

$$y_3 = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{s'}{\upsilon}\right) = 0{,}4\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{4-x}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_3 = 0{,}4\cdot\eta\mu 2\pi\left(t+\frac{x}{2}-2\right) \text{(S.I.) με } t\geq 0 \text{ και } 4-2t\leq x\leq 4 \quad (3)$$

ii) Για τη στιγμή t_1=0,75s οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν:

$$y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu(1,5\pi - \pi x) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \ \text{(S.I.) με } \mathrm{x} \le 1,5\mathrm{m} \quad (1\alpha)$$

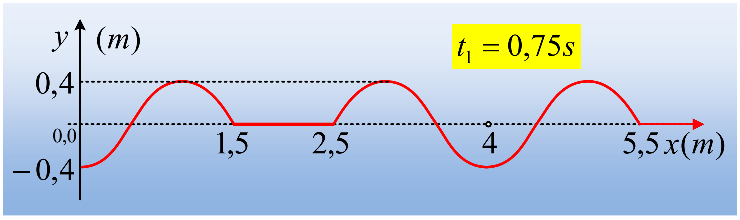
$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{2} + 2\right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(0,75 - \frac{\mathrm{x}}{2} + 2\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu(5,5\pi - \pi x) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \ \text{(S.I.) με } 4 \le \mathrm{x} \le 5,5\mathrm{m} \quad (2\alpha)$$

$$y_3 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} + \frac{\mathrm{x}}{2} - 2\right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(0,75 + \frac{\mathrm{x}}{2} - 2\right) \rightarrow$$

$$y_3 = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi x - 2,5\pi) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \ \text{(S.I.) με } 2,5\mathrm{m} \le \mathrm{x} \le 4\mathrm{m} \quad (3\alpha)$$

Με βάση τα παραπάνω και για τις θέσεις με x≥0 έχουμε την παρακάτω μορφή του μέσου:



iii) Α) Τη χρονική στιγμή t_2 το πρώτο κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x=\upsilon \cdot t_2=6m$. Συνεπώς στην περιοχή 0-4m έχουμε συμβολή του κύματος αυτού με το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά (y_3). Αλλά και δεξιά της πηγής O_2 έχουμε συμβολή στην περιοχή $4m \le x \le 6m$, ενώ στην περιοχή $6m \le x \le 10m$ διαδίδεται το κύμα y_2 προς τα δεξιά.

Με βάση αυτά έχουμε:

α) $0 \le x \le 4m$:

$$y = y_1 + y_3 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{2}\right) + 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} + \frac{\mathrm{x}}{2} - 2\right) =$$

$$= 2 \cdot 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} - t - \frac{x}{2} + 2}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} + t + \frac{x}{2} - 2}{2} =$$

$$= 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x + 2\pi) \cdot \eta\mu(2\pi t - 2\pi) \ (4)$$

Οπότε τη στιγμή t_2 παίρνουμε:

$$y = 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x + 2\pi) \cdot \eta\mu(2\pi 3 - 2\pi) = 0$$

β) $4m \le x \le 6m$:

$$y = y_1 + y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{2}\right) + 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{2} + 2\right) =$$

$$= 2 \cdot 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} - t + \frac{x}{2} - 2}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} + t - \frac{x}{2} + 2}{2} =$$

$$= 0{,}8 \cdot \sigma\upsilon\nu(-2\pi) \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + 1\right) \rightarrow$$

$$y = 0{,}8 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + 1\right) \text{ (S.I.) } (5)$$

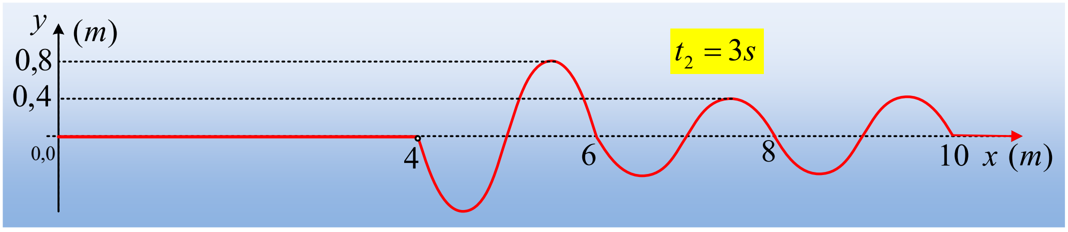
Οπότε τη στιγμή t_2 παίρνουμε:

$$y = 0{,}8 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + 1\right) = 0{,}8 \cdot \eta\mu 2\pi\left(3 - \frac{x}{2} + 1\right) = -0{,}8 \cdot \eta\mu(\pi x)$$

γ) $6\text{m} \le x \le 10\text{m}$:

$$y = 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\text{t} - \frac{\text{x}}{2} + 2\right) = 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(3 - \frac{\text{x}}{2} + 2\right) = -0{,}4 \cdot \eta\mu(\pi x)$$

Έτσι η μορφή του μέσου είναι όπως παρακάτω:



Β) Τη στιγμή t_3=3,25s το πρώτο κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x'=\upsilon t_3$=6,5m, συνεπώς έχουμε:

α) $0 \le x \le 4\text{m}$ ισχύει η σχέση (4) από όπου για t=3,25s παίρνουμε:

$$y = 0{,}8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x + 2\pi) \cdot \eta\mu(2\pi 3{,}25 - 2\pi) \rightarrow$$

$$y = 0{,}8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

β) $4\text{m} \le x \le 6{,}5\text{m}$ από την (5) θα έχουμε:

$$y = 0{,}8 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + 1\right) = 0{,}8 \cdot \eta\mu 2\pi\left(3{,}25 - \frac{x}{2} + 1\right) \rightarrow$$

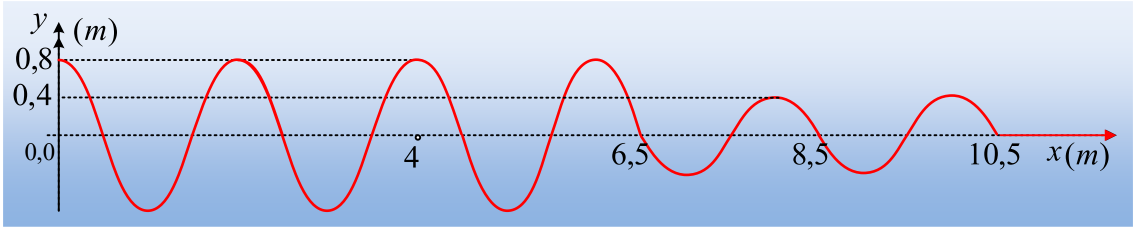
$$y = 0{,}8 \cdot \eta\mu(8{,}5\pi - \pi x) = 0{,}8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

γ) $6{,}5\text{m} \le x \le 10{,}5\text{m}$:

$$y = 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\text{t} - \frac{\text{x}}{2} + 2\right) = 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(3{,}25 - \frac{\text{x}}{2} + 2\right) \rightarrow$$

$$y = 0{,}4 \cdot \eta\mu(10{,}5\pi - \pi x) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Με βάση τα παραπάνω η μορφή του μέσου είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:

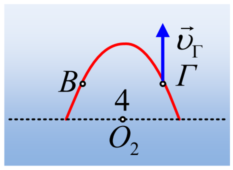


Σχόλια:

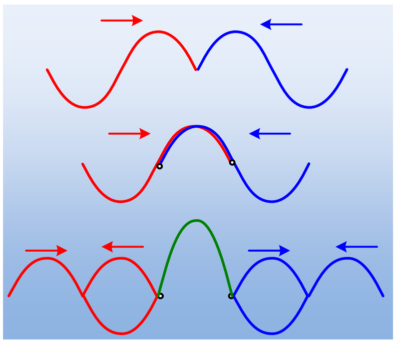
1) Αν προσέξουμε τις εξισώσεις (4) και (5), μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η πρώτη είναι εξίσωση στάσιμου κύματος, ενώ η δεύτερη εξίσωση τρέχοντος κύματος. Αυτό σημαίνει ότι κατά την συμβολή των κυμάτων y_1 και y_3 προκύπτει στάσιμο κύμα (δύο κύματα που διαδίδονται αντίθετα), ενώ κατά την συμβολή των κυμάτων (1) και (2) έχουμε ένα νέο τρέχον κύμα (τα δυο κύματα διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση).

2) Για την περιοχή $0 \leq x \leq 4m$ τις δύο παραπάνω στιγμές t_2 και t_3, έχει σχηματιστεί στάσιμο κύμα. Έτσι στην πρώτη περίπτωση, όλα τα σημεία περνούν από τη θέση ισορροπίας τους (ευθεία γραμμή), ενώ στην δεύτερη τα σημεία βρίσκονται σε μέγιστες απομακρύνσεις.

3) Ας πάρουμε δύο σημεία Β και Γ που ισαπέχουν από την πηγή O_2. Τη στιγμή t_3 και τα δυο σημεία έχουν ίσες απομακρύνσεις, αλλά όχι ίδιες ταχύτητες ταλάντωσης. Το σημείο Β έχει μηδενική ταχύτητα και τη στιγμή αυτή βρίσκεται σε θέση πλάτους. Αντίθετα το σημείο Γ είναι ένα σημείο κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, έχοντας ταχύτητα, όπως στο σχήμα.



4) Ένα ερώτημα που συχνά επιστρέφει είναι το εξής. Πώς γίνεται να έχει σχηματισθεί στάσιμο στην περιοχή $0 \leq x \leq 4m$, πράγμα που σημαίνει ότι σταματά η ροή ενέργειας διαμέσου των δεσμών και στη συνέχεια να μιλάς για συμβολή δεξιά της δεύτερης πηγής;
Η αλήθεια είναι ότι από τη στιγμή που θα δημιουργηθεί ένας δεσμός, σταματούν να διαδίδονται τα κύματα και στο σημείο αυτό έχουμε ανάκλασή τους. Οπότε τα κύματα που διαδίδονται δεξιά της O_2 είναι το y_2 και το y_3΄που προκύπτει μετά από ανάκλαση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Για περισσότερα, μπορείτε να διαβάσετε την ανάρτηση [εδώ.]

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης