Ένα πρόβλημα συμβολής κυμάτων

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ που απέχουν απόσταση 12cm, βρίσκονται στα σημεία Α και Β α-ντίστοιχα της ελεύθερης επιφάνειας νερού και προκαλούν εγκάρσια κύματα συχνότητας f=100Hz διαδιδό-μενα με ταχύτητα υ = 4 m/s και σταθερό πλάτος Α=1cm.

i) Να βρείτε το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν οι δύο πηγές.

ii) Θεωρούμε την ευθεία (ε) παράλληλη στην επιφάνεια του νερού, η οποία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Β.

iii) Ένα σημείο Μ βρίσκεται στην ευθεία (ε) και απέχει από το σημείο Β απόσταση 9cm. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι συνεχώς ακίνητο.

iv) Να βρεθεί η απόσταση από το σημείο Β του πλησιέστερου προς το Μ σημείου το οποίο επίσης είναι συνεχώς ακίνητο.

v) Να βρεθεί το πλήθος των σημείων της ευθείας (ε) που είναι συνεχώς ακίνητα.

Λύση

i) Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε ότι:

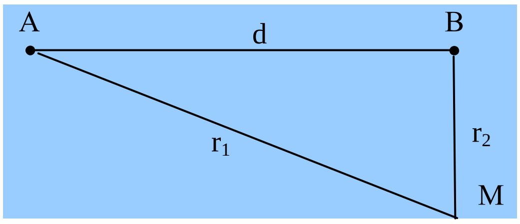
$$υ = λf \Leftrightarrow λ = \frac{υ}{f} = 4\,\text{cm}$$

ii) Γνωρίζουμε ότι το πλάτος Α΄ της ταλάντωσης ενός σημείου της επιφάνειας δίνεται από την σχέση

$$A' = 2A\left|συν\frac{π(r_1 - r_2)}{λ}\right| \qquad (1)$$

Για το σημείο Μ έχουμε ότι r_2=9cm και $r_1 = \sqrt{d^2 + r_2^2} = 15\,\text{cm}$

.



Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ.

$$A'_M = 2A\left|συν\frac{3π}{2}\right| = 0$$

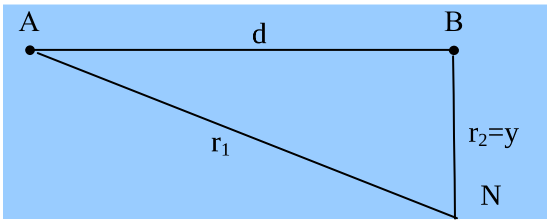
2ος τρόπος

Για την διαφορά των αποστάσεων του σημείου Μ από τις δύο πηγές ισχύει ότι:

$$r_1 - r_2 = 6\,\text{cm} = 3 \cdot 2\,\text{cm} = 3\frac{λ}{2}$$

Επειδή η διαφορά των αποστάσεων του Μ από τις δύο πηγές είναι ίση με περιττό πολλαπλάσιο ημικυμάτων, το σημείο Μ είναι σημείο απόσβεσης. Επομένως το σημείο Μ είναι συνεχώς ακίνητο.

iii) Για να είναι ένα σημείο της επιφάνειας του υγρού συνεχώς ακίνητο θα πρέπει η διαφορά των αποστά-σεών του από τις πηγές να είναι περιττό πολλαπλάσιο ημικυμάτων



Επομένως

$$r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \sqrt{d^2+y^2} - y = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \sqrt{d^2+y^2} = y + (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$$d^2 + y^2 = y^2 + (2n+1)\lambda y + (2n+1)^2\frac{\lambda^2}{4} \Leftrightarrow d^2 - (2n+1)^2\frac{\lambda^2}{4} = (2n+1)\lambda y \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{d^2}{(2n+1)\lambda} - (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (2)$$

Για το σημείο Μ ισχύει ότι $r_1 - r_2 = 6\,\text{cm} = 3\cdot 2\,\text{cm} = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow n = 1$

Συνεπώς, για το πλησιέστερο προς το Μ σημείο απόσβεσης ισχύει ότι n=0 ή n=2.

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) n=0 έχουμε ότι:

$$y_0 = \frac{d^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} = 35\,\text{cm}$$

Η απόσταση του σημείου αυτού από το Μ είναι 35cm - 9 cm=26 cm

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) n=2 έχουμε ότι:

$$y_2 = \frac{d^2}{5\lambda} - \frac{5\lambda}{4} = 2,2\,\text{cm}$$

Η απόσταση του σημείου αυτού από το Μ είναι 9cm – 2,2 cm=6,8 cm

iii) Για να είναι ένα σημείο της ευθείας (ε) σημείο απόσβεσης θα πρέπει η απόστασή του y από το σημείο Β να ικανοποιεί την σχέση (2) .

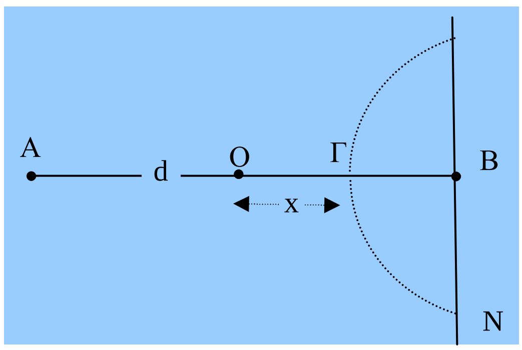
Ισχύει ότι $r_1 > r_2 \Rightarrow (2n+1) > 0$ Πρέπει επίσης:

$$y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{(2n+1)\lambda} \geq (2n+1)\frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow (2n+1)^2 \leq \frac{4d^2}{\lambda^2} \Leftrightarrow 0 < (2n+1) \leq \frac{2d}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$0 < 2n+1 \leq 6 \Leftrightarrow -1 < 2n \leq 5 \Leftrightarrow -0,5 \leq n \leq 2,5 \Leftrightarrow n \in \{0,1,2\}$$

Για κάθε τιμή του y αντιστοιχούν δύο σημεία της (ε) συμμετρικά ως προς την ΑΒ.

Επομένως, το πλήθος των σημείων της (ε) που είναι συνεχώς ακίνητα είναι 6.



<u>2ος τρόπος</u>

Τα σημεία το επιπέδου, που είναι συνεχώς ακίνητα, ανήκουν σε υπερβολές με εστίες τις δύο πηγές.

Τα σημεία της (ε) που είναι συνεχώς ακίνητα βρίσκονται στους κλάδους των υπερβολών «που είναι δεξιά» της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Σε κάθε κλάδο αντιστοιχούν δύο σημεία απόσβεσης της (ε). Αρκεί λοιπόν να βρούμε το πλήθος των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος ΟΜ που είναι σημεία απόσβεσης.

Έστω Γ σημείο απόσβεσης του ευθυγράμμου τμήματος ΟΒ (Ο είναι το μέσον του ΑΒ).

Για το σημείο Γ ισχύει ότι $r_1=6+x$ και $r_2=6-x$.

Για να είναι το Γ σημείο απόσβεσης πρέπει

$$r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 6 + x - 6 + x = 2(2n+1) \Leftrightarrow x = 2n+1\,.$$

Τα σημεία του ΟΒ ικανοποιούν την συνθήκη

$$0 < x \le 6 \Leftrightarrow 0 < 2n+1 \le 6 \Leftrightarrow n \in \{0,1,2\}$$

Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνουν 3 κλάδοι υπερβολών.

Άρα το πλήθος των σημείων απόσβεσης της (ε) είναι 6.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Βαγγέλης Κορφιάτης.