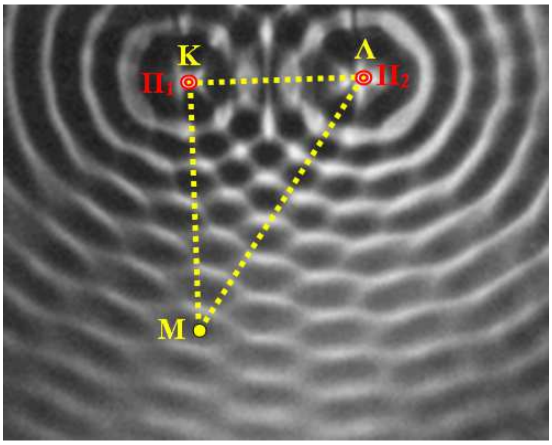
Συμβολή κυμάτων και η εξίσωση ταχύτητας ενός σημείου



Στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας ενός υγρού βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ παραγωγής αρμονικών κυμάτων, οι οποίες αρχίζουν να εκτελούν τη στιγμή t=0 ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξίσωση ***y=Αημωt***. Σημείο Μ βρίσκεται σε τέτοια θέση στην επιφάνεια του υγρού, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ώστε να σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ. Δίνονται οι αποστάσεις ***(ΚΛ)=3cm*** και ***(ΚΜ)=40/3cm***. Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ λόγω της συμβολής των κυμάτων περιγράφεται σε συνάρτηση με το χρόνο από την εξίσωση:

$$\boldsymbol{u_M = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu(4\pi t - 27\pi)}\ \textbf{(S.I.)}$$

α. Να υπολογίσετε την περίοδο, το μήκος κύματος και το πλάτος των κυμάτων που συμβάλλουν.

β. Να βρεθεί η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ τις χρονικές στιγμές:

i) t_1=6,75s ii) t_2=7,125s

γ. Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή πρώτη φορά, λόγω της συμβολής, η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του Μ μεγιστοποιείται.

δ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος ΚΜ που λόγω της συμβολής ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

ε. Με κατάλληλη μεταβολή της συχνότητας των δύο πηγών το σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού παραμένει συνεχώς ακίνητο. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συχνότητας για την οποία συμβαίνει αυτό.

Λύση:

α) Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(\Lambda M) = \sqrt{(K\Lambda)^2 + (KM)^2} = \sqrt{9 + \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{1681}{9}} = \frac{41}{3}cm$$

Μετά την έναρξη της συμβολής στο σημείο Μ, αυτό ταλαντώνεται με εξίσωση:

$$y_M = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{(KM)-(\Lambda M)}{\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{(KM)+(\Lambda M)}{2\lambda}\right)\ \ \gamma\iota\alpha\ \ t \geq \frac{(\Lambda M)}{u}$$

Οπότε η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του συγκεκριμένου σημείου θα είναι:

$$u_M = \omega \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{(KM)-(\Lambda M)}{\lambda}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{(KM)+(\Lambda M)}{2\lambda}\right)\ \ \gamma\iota\alpha\ \ t \geq \frac{(\Lambda M)}{u}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω με την δοθείσα στην εκφώνηση της άσκησης έχουμε:

$$2\pi\frac{(KM)+(\Lambda M)}{2\lambda} = 27\pi \Rightarrow \lambda = \frac{(KM)+(\Lambda M)}{27} = \frac{27}{27} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda = 1cm}}$$

Επιπλέον

$$2\pi\frac{t}{T} = 4\pi t \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T = 0,5s}}$$

Και τέλος

$$\omega \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{(KM)-(\Lambda M)}{\lambda}\right) = 0,2\pi \Rightarrow 4\pi \cdot 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,2\pi \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 0,05m}}$$

β) Για την ταχύτητα διάδοσης του κύματος ισχύει ότι:

$$u = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} = 0{,}02 m/s$$

Η δοθείσα χρονική εξίσωση ταχύτητας έχει νόημα για χρονικές στιγμές: $t \geq \frac{(\Lambda M)}{M} = \frac{41}{6} s (= 6{,}833 s)$, δηλαδή από την στιγμή που φτάνει σε αυτό το κύμα από την πιο απομακρυσμένη πηγή την Π_2.

Όμως το σημείο Μ ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή που φτάνει σε αυτό το κύμα από την πιο κοντινή πηγή δηλαδή την Π_1 και αυτό συμβαίνει την χρονική στιγμή:

$$t = \frac{(KM)}{u} = \frac{40}{6} s (= 6{,}667 s)$$

Οπότε την χρονική στιγμή t_1=6,75s το σημείο Μ ταλαντώνεται μόνο λόγω του κύματος από την Π_1 και έτσι η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$u_M = \omega \cdot A \sigma \upsilon \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{(KM)}{\lambda}\right) = 0{,}2\pi \sigma \upsilon \nu \left(4\pi t - \frac{80\pi}{3}\right)$$

Οπότε για t_1=6,75s έχουμε:

$$u_M = 0{,}2\pi \sigma \upsilon \nu \left(4\pi \cdot 6{,}75 - \frac{80\pi}{3}\right) = 0{,}2\pi \sigma \upsilon \nu \left(27\pi - \frac{80\pi}{3}\right) = 0{,}2\pi \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u_M = 0{,}1\pi\ m/s}}$$

Ενώ για t_2=7,125s η συμβολή έχει αρχίσει στο σημείο Μ, οπότε η ταχύτητα δίνεται από δοθείσα από την εκφώνηση εξίσωση και έχουμε:

$$\mathrm{u_M} = 0{,}2\pi\sigma\upsilon\nu(4\pi \cdot 7{,}125 - 27\pi) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u_M = 0}}$$

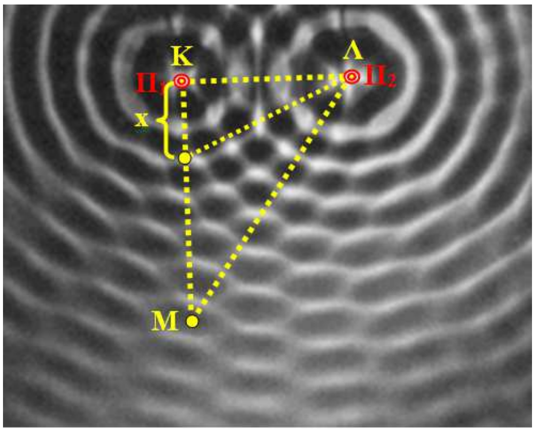
γ) Η κινητική ενέργεια του σημείου Μ μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το μέτρο της ταχύτητας. Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{u_M} = \pm u_{M,max} \Rightarrow 0{,}2\pi\sigma\upsilon\nu(4\pi t - 27\pi) = \pm 0{,}2\pi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(4\pi t - 27\pi) = \pm 1 \Rightarrow 4\pi t - 27\pi = \kappa\pi$$

$$4\pi t = \kappa\pi + 27\pi \Rightarrow t = \frac{k + 27}{4}$$

Για κ=0: $t = \frac{27}{4} = 6{,}75 s$ *η οποία όμως απορρίπτεται δεν έχει αρχίσει η συμβολή στο σημείο Μ.*

Για κ=1: $t = \frac{28}{4} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = 7s}}$



δ) Έστω x η απόσταση κάποιου σημείου από το Α, το οποίο λόγω συμβολής ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος (ενίσχυση). Για όλα τα σημεία ενισχυτικής συμβολής του ελαστικού μέσου ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N \cdot \lambda$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση επειδή τα ζητούμενα σημεία ενίσχυσης βρίσκονται αριστερά της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ θα ισχύει N<0. Οπότε:

$$x - \sqrt{(K\Lambda)^2 + x^2} = N \cdot \lambda \Rightarrow x - N \cdot \lambda = \sqrt{(K\Lambda)^2 + x^2}$$

$$\Rightarrow (x - N \cdot \lambda)^2 = (K\Lambda)^2 + x^2$$

$$x^2 - 2N \cdot \lambda \cdot x + N^2 \cdot \lambda^2 = (K\Lambda)^2 + x^2$$

$$x = \frac{N^2 \cdot \lambda^2 - (K\Lambda)^2}{2N \cdot \lambda} = \frac{N^2 - 9}{2N}$$

Επίσης πρέπει: $0 < x < \frac{40}{3} cm$.

Οπότε:

Για N=-1: $x=\frac{1-9}{-2}=\frac{-8}{-2}=4cm\ (δεκτή)$
Για N=-2: $x=\frac{4-9}{-4}=\frac{-5}{-4}=1{,}25cm\ (δεκτή)$
Για N≤-3 δεν ικανοποιείται η απαίτηση $0<x<\frac{40}{3}cm$. Άρα στην ΚΜ υπάρχουν **2 σημεία ενίσχυσης**.

ε) Η αρχική συχνότητα ταλάντωσης των πηγών είναι $f=\frac{1}{T}=2Hz$. Ψάχνουμε την λίγο μεγαλύτερη από 2Hz συχνότητα ταλάντωσης των πηγών για την οποία το Μ θα παραμένει ακίνητο δηλαδή μετατρέπεται σε σημείο ακύρωσης. Μεταβάλλοντας την συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών μεταβάλλεται το μήκος κύματος (η ταχύτητα διάδοσης δεν αλλάζει δεδομένου ότι τα δύο κύματα εξακολουθούν να διαδίδονται στο ίδιο υλικό μέσο). Οπότε αφού το σημείο Μ γίνεται σημείο ακυρωτικής συμβολής για την διαφορά των αποστάσεών του από τις δύο πηγές θα ισχύει:

$$|(KM)-(\Lambda M)|=(2N+1)\frac{\lambda'}{2}\Rightarrow|(KM)-(\Lambda M)|=(2N+1)\frac{u}{2f'}\Rightarrow f'=\frac{(2N+1)u}{2|(KM)-(\Lambda M)|}$$

Για N=0: $f_{min}{}'=\frac{0{,}02}{2\cdot\frac{0{,}01}{3}}\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{f_{min}{}'=3Hz}}$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....
Επιμέλεια:
Πέτρος Καραπέτρος