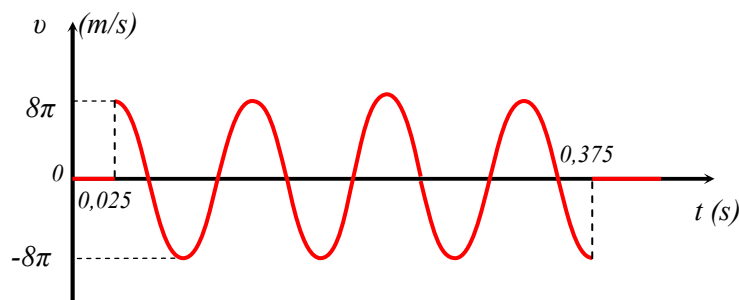


Επαναληπτικό πρόβλημα στη συμβολή κυμάτων.

Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 που απέχουν απόσταση $d=8\text{m}$, παράγουν στην επιφάνεια ενός υγρού αρμονικά κύματα που έχουν ταχύτητα διάδοσης $v=20\text{m/s}$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης των πηγών σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $y=0,4\eta\mu 20\pi t$ (S.I.).

- 1) Σε ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού που απέχει απόσταση $r_1=4\text{m}$ από την πηγή Π_1 και απόσταση r_2 από την πηγή Π_2 με $r_2 > r_1$, τα δύο κύματα φτάνουν με χρονική καθυστέρηση $\Delta t=0,2\text{s}$.
 - α) Να διερευνήσετε αν στο σημείο Σ έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.
 - β) Να βρεθεί η απόσταση r_2 .
 - γ) Να βρεθεί η υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης στην οποία βρίσκεται το σημείο Σ .
 - δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο για $t \geq 0$.
 - ε) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του Σ τη χρονική στιγμή $t=0,45\text{s}$.
 - ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο Σ σε συνάρτηση με το χρόνο για $t \geq 0$ αν θεωρήσουμε ότι η στοιχειώδης μάζα του υλικού σημείου Σ είναι $m=5 \cdot 10^{-3}\text{ Kg}$.
 - η) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο για $t \geq 0$.

- 2) Για ένα σημείο P που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ και απέχει x_1 και x_2 ($x_1 > x_2$) από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α) Να διερευνήσετε αν στο σημείο P έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.
 - β) Να βρεθούν οι αποστάσεις x_1 και x_2 . Σε ποια υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης βρίσκεται το σημείο P ;
 - γ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο, για κάθε κύμα ξεχωριστά. Ποια αρχή επιβεβαιώνεται από τις γραφικές παραστάσεις;
- 3) Να βρείτε ποια σημεία μεταξύ των Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου Σ και ποια σημεία μεταξύ των Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται με ενέργεια

ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου P αν θεωρήσουμε ότι όλα τα υλικά σημεία μεταξύ των πηγών έχουν την ίδια στοιχειώδη μάζα με το Σ.

- 4) Να σχεδιάσετε τις υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης μεταξύ των πηγών Π₁ και Π₂.
- 5) Να βρείτε τη διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές για ένα σημείο Λ που ανήκει στην 2^η υπερβολή αποσβεστικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου του Π₁Π₂.
- 6) Ένα σημείο Κ της επιφάνειας του υγρού που ανήκει στην 5^η υπερβολή ενισχυτικής συμβολής δεξιά της υπερβολής του Σ, μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό ταλαντώνεται με εξίσωση $y=0,8\eta\mu(20\pi t-5\pi)$ (S.I.). Να βρείτε τις αποστάσεις d₁ και d₂ του σημείου Κ από τις πηγές Π₁ και Π₂. Δίνεται: $\pi^2=10$.

Απάντηση:

- 1) Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών $y=A\eta\mu\omega t$ και τη δοθείσα έχω: $A=0,4\text{m}$, $\omega=20\pi\text{ rad/s}$ οπότε $T=2\pi/\omega \rightarrow T=0,1\text{ s}$, $f=10\text{ Hz}$ και $v=\lambda f$ ή $\lambda=v/f$ ή $\lambda=20/10$ ή $\lambda=2\text{m}$.

α) Μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο Σ αυτό ταλαντώνεται με πλάτος $A'_\Sigma = 2A|\text{συν}2\pi \frac{r_1-r_2}{2\lambda}| \rightarrow$

$$A_\Sigma = 2A|\text{συν}2\pi \frac{vt_1-vt_2}{2\lambda}| \rightarrow A'_\Sigma = 2A|\text{συν}\pi \frac{v}{\lambda}(t_1-t_2)| \rightarrow A'_\Sigma = 2A|\text{συν}\pi\Delta t| \rightarrow A_\Sigma =$$

$$2A|\text{συν}\pi \cdot 10 \cdot 0,2| \rightarrow A'_\Sigma = 2A|\text{συν}2\pi| \rightarrow A'_\Sigma = 2A \text{ άρα στο } \Sigma \text{ έχουμε ενισχυτική συμβολή.}$$

β) Το κύμα της πηγής Π₁ φτάνει στο Σ την $t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{4}{20} \rightarrow t_1 = 0,2\text{s}$ ενώ το κύμα της Π₂ φτάνει στο Σ

$$\text{την } t_2=t_1+\Delta t=0,2+0,2 \rightarrow t_2 = 0,4\text{s} \text{ αφού } r_2 > r_1. \text{ Άρα } r_2=vt_2 \rightarrow r_2=20 \cdot 0,4 \rightarrow r_2 = 8\text{m}.$$

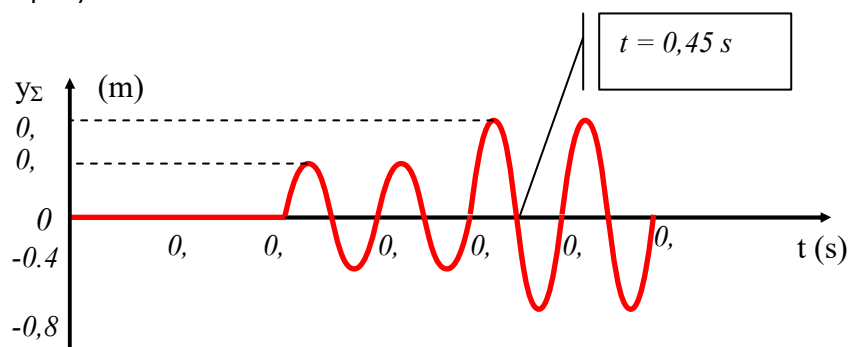
γ) Αφού στο Σ έχουμε ενισχυτική συμβολή ισχύει $r_1-r_2=N\lambda \rightarrow 4-8=N \cdot 2 \rightarrow -4 = N \cdot 2 \rightarrow N = -2$. Δηλαδή το Σ ανήκει στη δεύτερη υπερβολή ενίσχυσης αριστερά της μεσοκαθέτου του Π₁Π₂.

δ) Για $0 \leq t < 0,2\text{ s}$ $y_\Sigma = 0$ (1) αφού κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο Σ.

Για $0,2 \leq t < 0,4\text{ s}$ έχω: $y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}) \rightarrow y_\Sigma = 0,4\eta\mu 2\pi(10t - 2)$ (S.I.) (2) αφού το Σ ταλαντώνεται λόγω του κύματος της Π₁.

Για $t \geq 0,4\text{ s}$ έχω: $y_\Sigma = 2A \text{ συν}2\pi \frac{r_1-r_2}{2\lambda} \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}) \rightarrow y_\Sigma = 0,8\eta\mu 2\pi(10t - 3)$ (S.I.)

(3) αφού στο Σ τώρα έχουν φτάσει και τα δύο κύματα. Οπότε η γραφική παράσταση της $y_\Sigma = f(t)$ είναι η παρακάτω:



- ε) **1^{ος} Τρόπος:** Τη χρονική στιγμή $t = 0,45$ s στο Σ έχουμε συμβολή, άρα ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση (3) οπότε $v_{\Sigma} = \omega(+A_{\Sigma})\sin 2\pi(10t-3)$ και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$v_{\Sigma} = 20\pi \cdot 0,8 \sin(20\pi \cdot 0,45 - 6\pi) \rightarrow v_{\Sigma} = 16\pi \sin(9\pi - 6\pi) \rightarrow v_{\Sigma} = 16\pi \sin(3\pi) \rightarrow v_{\Sigma} = -16\pi \text{ m/s.}$$

- 2^{ος} Τρόπος:** Τη χρονική στιγμή $t = 0,45$ s το σημείο Σ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενου προς τα αρνητικά, όπως προκύπτει από την προηγούμενη γραφική παράσταση άρα $v_{\Sigma} = -v_{\max(\Sigma)} = -\omega A_{\Sigma} = -20\pi \cdot 0,8 \rightarrow v_{\Sigma} = -16\pi \text{ m/s.}$

- ζ) Για τη δύναμη επαναφοράς ισχύει: $F_{\text{επαν}} = -m\omega^2 y_{\Sigma} \rightarrow F_{\text{επαν}} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot 20^2 \cdot \pi^2 y_{\Sigma} \rightarrow$

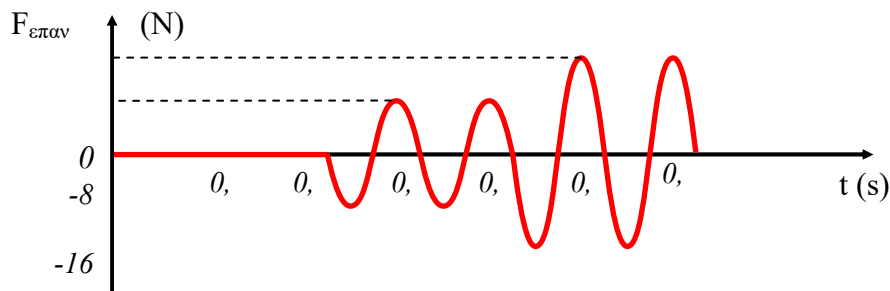
$$F_{\text{επαν}} = -20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 y_{\Sigma} \rightarrow F_{\text{επαν}} = -20 y_{\Sigma} \text{ οπότε από τις σχέσεις (1), (2), (3) του ερωτήματος δ}$$

έχω:

Για $0 \leq t < 0,2$ s $F_{\text{επαν}} = 0$ αφού κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο Σ .

Για $0,2 \leq t < 0,4$ s $F_{\text{επαν}} = -8\eta\mu 2\pi(10t - 2)$ (S.I.)

Για $t \geq 0,4$ s $F_{\text{επαν}} = -16\eta\mu 2\pi(10t - 3)$ (S.I.) και η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

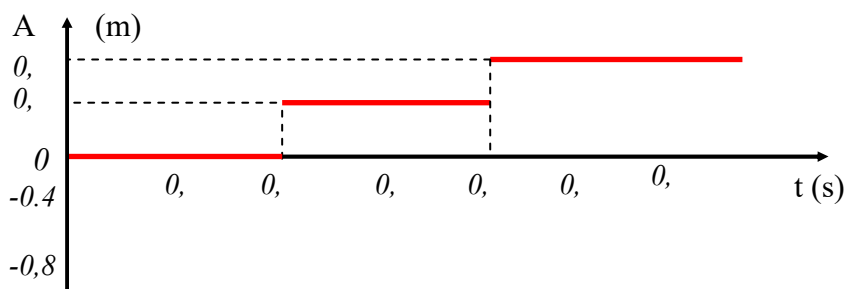


- η) Για το πλάτος ταλάντωσης του Σ έχω:

Για $0 \leq t < 0,2$ s $A_{\Sigma} = 0$

Για $0,2 \leq t < 0,4$ s $A_{\Sigma} = 0,4$ m

Για $t \geq 0,4$ s $A_{\Sigma} = 0,8$ m



- 2) α) Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας χρόνου παρατηρούμε ότι μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,375$ s το σημείο P δεν ταλαντώνεται, άρα το σημείο P είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής.

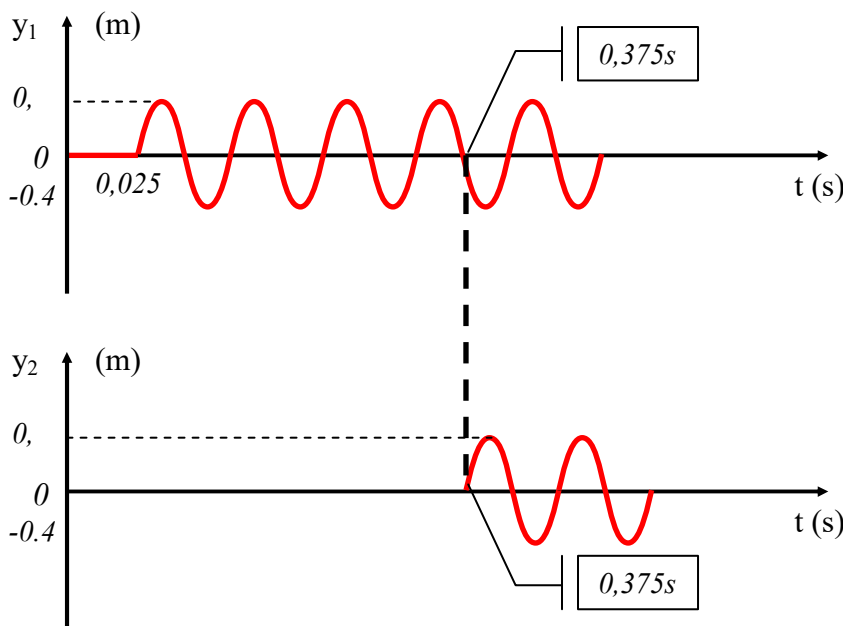
- β) Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας χρόνου παρατηρούμε ότι το κύμα της πιο κοντινής πηγής Π_2 ($x_2 < x_1$) φτάνει στο P την $t_1 = 0,025$ s άρα $x_2 = v t_1$ ή $x_2 = 20 \cdot 0,025$ ή $x_2 = 0,5$ m.

Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας χρόνου παρατηρούμε ότι το κύμα της πιο μακρινής πηγής Π_1 ($x_2 < x_1$) φτάνει στο P την $t_2 = 0,375$ s άρα $x_1 = vt_2$ ή $x_1 = 20 \cdot 0,375$ ή $x_1 = 7,5$ m.

Αφού το P είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής έχω: $x_1 - x_2 = (2N+1)\lambda/2$ άρα $7,5 - 0,5 = (2N+1) \cdot 1$ άρα $7 = 2N+1 \rightarrow N = 3$, άρα το σημείο P είναι σημείο της **τέταρτης!!!** υπερβολής αποσβεστικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου του $\Pi_1\Pi_2$. ($N = 0, 1, 2, 3$).

- γ) Το κύμα της Π_2 για το P δίνει $y_2 = A\eta\mu 2\pi(t/T - x_2/\lambda)$ άρα $y_2 = 0,4\eta\mu 2\pi(10t - 0,5/2)$ άρα $y_2 = 0,4\eta\mu(20\pi t - 0,5\pi)$ για $t \geq 0,025$ s.

Το κύμα της Π_1 για το P δίνει $y_1 = A\eta\mu 2\pi(t/T - x_1/\lambda)$ άρα $y_1 = 0,4\eta\mu 2\pi(10t - 7,5/2)$ άρα $y_1 = 0,4\eta\mu(20\pi t - 7,5\pi)$ για $t \geq 0,375$ s. Με τις εξής γραφικές παραστάσεις:



(Παρατηρείστε ότι σε χρόνο $\Delta t = 0,375 - 0,025 = 0,35$ s $= 0,3 + 0,05 = 3T + T/2$ το σημείο P έχει εκτελέσει 3,5 ταλαντώσεις).

Παρατηρούμε ότι επιβεβαιώνεται η αρχή της επαλληλίας. Ειδικά μετά την $t = 0,375$ s όταν λόγω του κύματος της Π_1 το σημείο P είναι στη θέση $-A$, λόγω του κύματος της Π_2 είναι στη θέση $+A$ οπότε μετά την $t = 0,375$ s, $y_1 = -y_2$ άρα $y_1 + y_2 = 0$. Άρα αποσβεστική συμβολή.

- 3) Ίδια ενέργεια ταλάντωσης με το Σ έχουν τα σημεία του $\Pi_1\Pi_2$ που ταλαντώνονται με πλάτος $2A$ αφού έχουν την ίδια μάζα με το Σ . Δηλαδή ζητούνται τα σημεία ενισχυτικής συμβολής. Για τα σημεία ενισχυτικής συμβολής του $\Pi_1\Pi_2$ έχω:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 - r_2 = N\lambda \\ r_1 + r_2 = d \end{array} \right\} \quad 2r_1 = N\lambda + d \rightarrow 2r_1 = N \cdot 2 + 8 \rightarrow r_1 = N + 4.$$

Όμως $0 < N + 4 < 8 \rightarrow -4 < N < 4$ άρα $N = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Δηλαδή έχουμε 7 σημεία ενισχυτικής συμβολής μεταξύ των $\Pi_1\Pi_2$ στις θέσεις:

Για $N = -3$ $r_1 = 1$ m, για $N = -2$ $r_1 = 2$ m, για $N = -1$ $r_1 = 3$ m, για $N = 0$ $r_1 = 4$ m, για $N = 1$ $r_1 = 5$ m,
για $N = 2$ $r_1 = 6$ m, για $N = 3$ $r_1 = 7$ m.

Ίδια ενέργεια ταλάντωσης με το P έχουν τα σημεία του $\Pi_1\Pi_2$ που ταλαντώνονται με πλάτος 0 αφού έχουν την ίδια μάζα με το P. Για τα σημεία αποσβεστικής συμβολής του $\Pi_1\Pi_2$ έχω:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2 \\ r_1 + r_2 = d \end{array} \right\} \text{ άρα } 2r_1 = (2N+1)\lambda/2 + d \rightarrow r_1 = (2N+1)\lambda/4 + d/2.$$

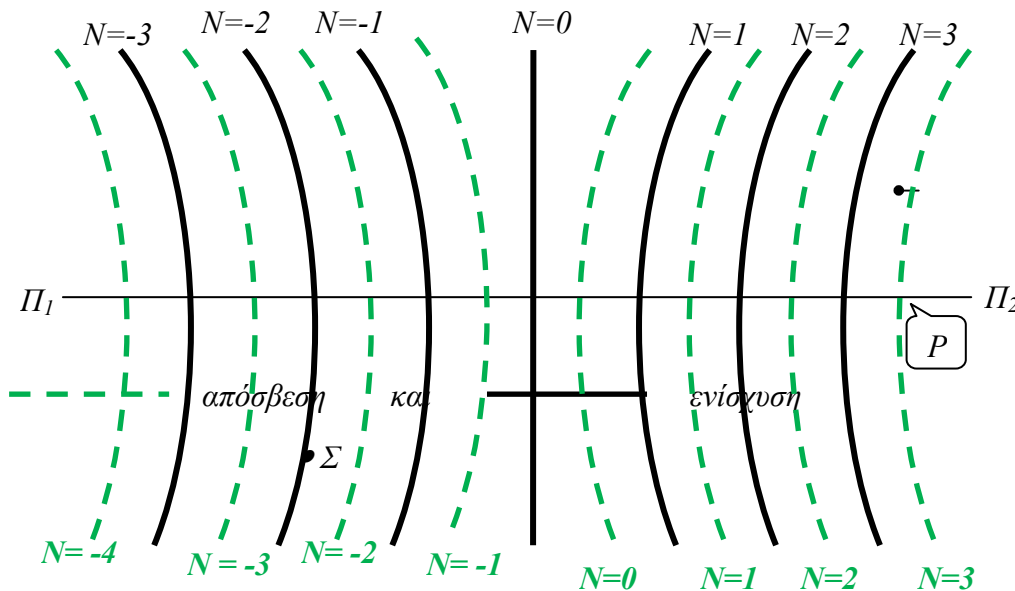
Όμως $0 < (2N+1)\lambda/4 + d/2 < 8$ $\rightarrow -4 < (2N+1)\lambda/4 < 4$ $\rightarrow -8 < 2N+1 < 8$
 $\rightarrow -9 < 2N < 7 \rightarrow -4,5 < N < 3,5$ άρα $N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, .$

Δηλαδή έχουμε 8 σημεία αποσβεστικής συμβολής (μαζί με το P) μεταξύ των $\Pi_1\Pi_2$ στις θέσεις:

Για $N=-4$ $r_1=0,5m$, για $N=-3$ $r_1=1,5m$, για $N=-2$ $r_1=2,5m$, για $N=-1$ $r_1=3,5m$, για $N=0$ $r_1=4,5m$, για $N=1$ $r_1=5,5m$, για $N=2$ $r_1=6,5m$ και για $N=3$ $r_1=7,5m$ (Σημείο P).

Άρα **άλλα 7 σημεία μεταξύ των $\Pi_1\Pi_2$** έχουν ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου P.

4) Επομένως οι αντίστοιχες υπερβολές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



5) Το σημείο Λ που ανήκει στη **2^η** υπερβολή αποσβεστικής συμβολής αντιστοιχεί στο **N=1**

$$\text{άρα } x_1 - x_2 = (2N+1)\lambda/2 \rightarrow x_1 - x_2 = (2+1)\lambda/2 \rightarrow x_1 - x_2 = 3m.$$

6) Βρήκαμε στο ερώτημα 1γ ότι το σημείο Σ ανήκει στην υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με $N = -2$ επομένως το σημείο Κ αφού είναι στην 5^η υπερβολή δεξιά του Σ θα έχει **N=3** άρα:

$$d_1 - d_2 = 3\lambda \rightarrow d_1 - d_2 = 6m \quad (4).$$

Από την εκφώνηση για την ταλάντωση του Κ έχω: $y_K = 0,8\eta\mu(20\pi t - 5\pi)$ (5) (S.I.)

$$\text{όμως } y_K = 2A\sigma\eta\mu\pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda} \eta\mu 2\pi(10t - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}) \text{ ή } y_K = 2A\sigma\eta\mu(3\pi)\eta\mu 2\pi(10t - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}) \text{ ή}$$

$$y_K = -0,8\eta\mu(20\pi t - 2\pi \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}) \text{ ή } y_K = 0,8\eta\mu(20\pi t - \pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda} + \pi) \quad (6)$$

οπότε συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις (5) και (6) έχω: $-\pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda} + \pi = -5\pi \rightarrow \pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda} = 5\pi + \pi \rightarrow$

$d_1 + d_2 = 12 \text{ m}$ (7). Λύνοντας το σύστημα των (4) και (7) έχω $d_1 = 9\text{m}$ και $d_2 = 3\text{m}$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μαρούσης Ευάγγελος