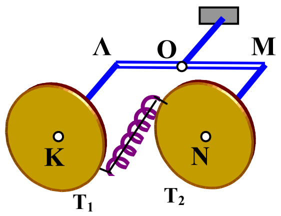
Αρχή διατήρησης ενέργειας και στροφορμής – 2ο Θέμα



Ορθογώνιο πλαίσιο ΚΛΜΝ σχήματος «Π» πλευράς ΛΜ = d = 3r και αμελητέας μάζας , μπορεί να στέφεται χωρίς τριβές , γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που τέμνει κάθετα το μέσον Ο της πλευράς ΛΜ.

Δυο πανομοιότυποι τροχοί T_1 και T_2 μάζας m ο καθένας κι ακτίνας r , μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές , ως προς κάθετους άξονες τις οριζόντιες πλευρές ΛΚ και ΜΝ του πλαισίου, έχοντας το επίπεδό τους κατακόρυφο και τα κέντρα τους στα σημεία Κ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ανάμεσα σε δυο καρφιά αμελητέας μάζας που είναι καρφωμένα στην περιφέρεια των τροχών στη διεύθυνση της ακτίνας , και εξέχουν κατά το ίδιο μήκος, συγκρατείται με τη βοήθεια νήματος συσπειρωμένο κατά x = r , ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=11m\lambda^2$ με $\lambda > 0$. Αρχικά , το σύστημα κρατείται σε ηρεμία και το πλαίσιο είναι οριζόντιο.

Κάποια χρονική στιγμή , κόβουμε το νήμα και ταυτόχρονα αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο.

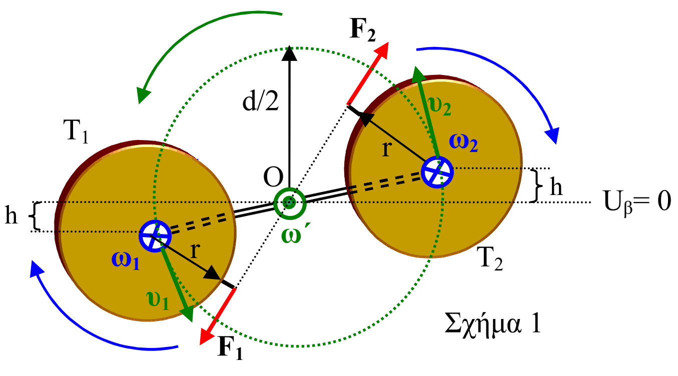
Όταν το ελατήριο θα αποκτά το φυσικό του μήκος, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κάθε τροχού γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του θα είναι

α. $\omega = \lambda$, β. $\omega = 3\lambda$, γ. $\omega = 5\lambda/2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς το κέντρο μάζας του είναι $I = (½)mr^2$.

Απάντηση



Σχήμα 1

Εξαιτίας των ροπών που ασκούν οι δυνάμεις $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$ του ελατηρίου , οι δυο τροχοί θ' αρχίσουν να στρέφονται ως προς τους άξονες που είναι κάθετοι στα κέντρα τους δηλαδή να ιδιοστρέφονται , και μάλιστα κατά την ίδια φορά όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Έτσι οι στροφορμές τους, $\vec{L}_1, \vec{L}_2$ θα έχουν διεύθυνση που είναι κάθετη στη σελίδα και φορά προς τα μέσα δηλαδή $\vec{L}_1 \otimes, \vec{L}_2 \otimes$, οπότε $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 \neq \vec{0}$.

Όμως επειδή οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το Ο είναι μηδέν ή αλληλοεξουδετερώνονται (ροπές των βαρών) η συνολική στροφορμή του συστήματος πρέπει να διατηρείται σταθερή και ίση με την αρχική της τιμή , δηλαδή ίση με μηδέν $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} = \vec{0}$.

Αυτό σημαίνει ότι ολόκληρο το σύστημα , θ' αρχίσει να στρέφεται ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Ο με αντίθετη φορά από τη φορά ιδιοπεριστροφής των τροχών , όπως φαίνεται στο σχήμα 1 , ώστε να προκύψει στροφορμή αντίθετη του αθροίσματος $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$.

Εξ άλλου , επειδή οι στιγμιαίες τιμές ων δυνάμεων που ασκεί το ελατήριο έχουν ίσα μέτρα , και οι στιγμιαίες τιμές των ροπών που ασκούν στους τροχούς θα είναι ίσες αφού τα άκρα του ελατηρίου απέχουν ίσες αποστάσεις από τα κέντρα Κ ,Ν.

Επομένως , τη χρονική στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος και παύουν να ασκούνται οι δυνάμεις του, οι στροφορμές των τροχών θα είναι

$$L_1 = L_2 = \sum F \cdot R \cdot dt \quad \text{ή}$$

$$L_1 = I\omega_1 \text{ και } L_2 = I\omega_2 \text{ άρα } \omega_1 = \omega_2 = \omega \ (1)$$

Οι τροχιακές ταχύτητες εξάλλου $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ θα έχουν μέτρα $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon = \omega' \cdot \frac{d}{2}$ (2) όπου ω΄ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του συστήματος ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Ο οι δε τροχιακές στροφορμές θα είναι $L_{1\tau\rho} = L_{2\tau\rho} = m\upsilon\frac{d}{2}$ (3) .

Με βάση λοιπόν την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_{1\tau\rho} + \vec{L}_{2\tau\rho} = \vec{0}$.

Ορίζοντας θετική τη φορά της ιδιοπεριστροφής και με βάση τις (1) , (2) , (3) προκύπτει ότι

$$2 \cdot \frac{1}{2} mr^2\omega - 2m\upsilon\frac{d}{2} = 0 \ \text{ή} \ mr^2\omega - m \cdot \omega'\frac{d}{2} \cdot d = 0 \quad \text{άρα} \ \omega' = 2\frac{r^2}{d^2}\omega \ . \ (4)$$

και από (2) , (4)

$$\upsilon = \frac{d}{2} \cdot \omega' = \frac{d}{2} \cdot 2\frac{r^2}{d^2}\omega = \frac{r^2}{(3r)} \cdot \omega = \frac{r}{3}\omega \quad (5)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή της διατήρησης της ενέργειας και με τη βοήθεια του σχήματος 1 έχουμε

$$\frac{1}{2}k \cdot x^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2\omega^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m\upsilon^2 - mgh + mgh \ (6)$$

Θέτουμε όπου $x = r$, $\upsilon = \frac{r}{3} \cdot \omega$ και μετά τις πράξεις προκύπτει ότι **ω = 3λ .**

Άρα σωστή είναι η β.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Μανώλης Δρακάκης