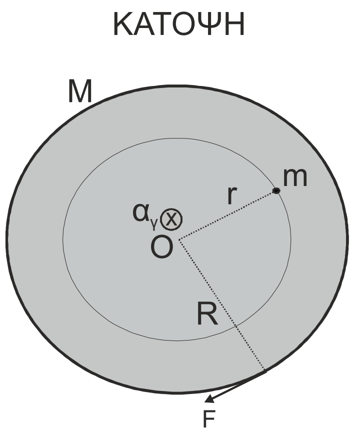
# *Ψίχουλο πάνω σε δίσκο*




Ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R είναι αρχικά ακίνητος. Πάνω στο δίσκο και σε απόσταση r από το κέντρο του βρίσκεται ένα ψίχουλο μάζας m αμελητέων διαστάσεων. Το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Τη χρονική στιγμή t=0 ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου δύναμη σταθερού μέτρου F, η οποία εφάπτεται συνεχώς στο δίσκο. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_{δίσκου} = \frac{1}{2}MR^2$.

α. να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος

β. να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του ψίχουλου

γ. να εξηγήσετε γιατί η στατική τριβή που ασκείται στο ψίχουλο δεν διέρχεται από το κέντρο O του δίσκου

δ. να υπολογίσετε τη στατική τριβή που δέχεται το ψίχουλο σε συνάρτηση με το χρόνο

ε. αν ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ δίσκου και ψίχουλου είναι $\mu_{ορ}$, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t_1$, κατά την οποία το ψίχουλο ολισθαίνει.

Δίνονται M, R, m, r, F, $\mu_{ορ}$.

### *Απάντηση:*

α. Η ροπή αδράνειας $I_O$ του συστήματος δίσκου – ψίχουλου ως προς το O είναι

$$I_O = I_{δίσκου} + I_{ψίχουλου} \rightarrow I_O = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

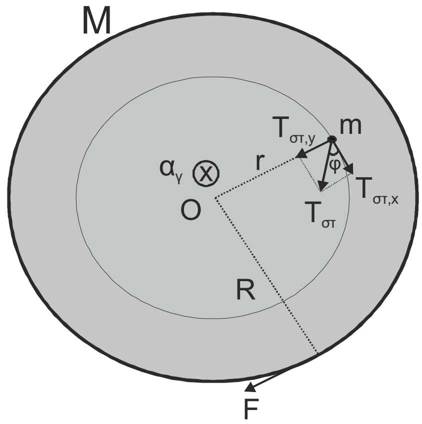
Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης για το σύστημα και έχουμε

$$\Sigma\tau = I_O \cdot \alpha_\gamma \rightarrow F \cdot R = (\frac{1}{2}MR^2 + mr^2) \cdot \alpha_\gamma \rightarrow \alpha_\gamma = \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}$$

β. Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του ψίχουλου ισχύει

$$(\frac{dL}{dt})_{ψίχουλου} = I_{ψίχουλου} \cdot \alpha_\gamma \rightarrow (\frac{dL}{dt})_{ψίχουλου} = mr^2 \cdot \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του ψίχουλου εκφράζει τη συνισταμένη ροπή που ασκείται σε αυτό. Εφόσον ο ρυθμός αυτός είναι διάφορος του μηδενός, η συνισταμένη ροπή στο ψίχουλο πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός. Έτσι αν ο φορέας της στατικής τριβής που ασκείται στο ψίχουλο διερχόταν από το Ο, τότε η ροπή της θα ήταν μηδενική, πράγμα άτοπο.




δ. Το ψίχουλο κάθε χρονική στιγμή έχει επιτάχυνση, της οποίας οι συνιστώσες είναι μια επιτρόχεια επιτάχυνση $α_ε$, εφαπτόμενη στην τροχιά του ψίχουλου και μια κεντρομόλος επιτάχυνση $α_κ$, προς το κέντρο Ο. Επομένως για το ψίχουλο θα ισχύει

$$\Sigma F_x = m \cdot α_ε \rightarrow T_{στ,x} = m \cdot α_γ \cdot r \rightarrow T_{στ,x} = m \cdot \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \cdot r$$

και

$$\Sigma F_y = m \cdot α_κ \rightarrow T_{στ,y} = m \cdot ω^2 \cdot r \rightarrow T_{στ,y} = m \cdot α_γ^2 \cdot t^2 \cdot r \rightarrow$$

$$T_{στ,y} = m \cdot \left(\frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)^2 \cdot t^2 \cdot r$$

Επομένως

$$T_{στ} = \sqrt{T_{στ,x}^2 + T_{στ,y}^2} \rightarrow T_{στ} = \sqrt{\left(m \cdot \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \cdot r\right)^2 + \left[m \cdot \left(\frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)^2 \cdot t^2 \cdot r\right]^2} \rightarrow$$

$$T_{στ} = m \cdot \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \cdot r \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)^2 t^4}$$

και

$$εφφ = \frac{T_{στ,y}}{T_{στ,x}} \rightarrow εφφ = \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \cdot t^2, \quad t \in [0, t_1]$$

όπου $t_1$ η στιγμή της ολίσθησης του ψίχουλου.

**Παρατήρηση**

Για t=0 είναι φ=0, δηλαδή η $T_{στ}$ είναι εφαπτόμενη στην τροχιά του ψίχουλου (λογικό αφού την t=0 η κεντρομόλος επιτάχυνση του ψίχουλου είναι μηδέν), ενώ αυξανομένου του t, η φ αυξάνεται, άρα η $T_{στ}$ ‘πλησιάζει’ προς την επιβατική ακτίνα του ψίχουλου. Η γραφική παράσταση της εφφ-t είναι παραβολή ή της εφφ-$t^2$ είναι ευθεία (για να μην ξεχνάμε και το ερώτημα Γ4 των εξετάσεων του 2015).

ε. τη χρονική στιγμή $t_1$ είναι

$$T_{στ} = T_{ορ} \rightarrow m \cdot \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \cdot r \cdot \sqrt{1 + (\frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2})^2 t_1^4} = \mu_{ορ} \cdot m \cdot g$$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη στιγμή $t_1$.

**Υλικό Φυσικής-Χημείας**

*Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…*

Επιμέλεια:

***Παπάζογλου Αποστόλης***