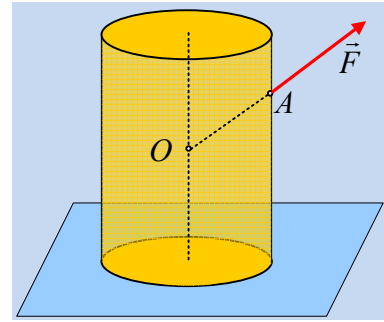


### Ολίσθηση ή ανατροπή του κυλίνδρου;

Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας  $M$ , ακτίνας βάσης  $R$  και ύψους  $h=4R$  ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής  $\mu_s=\mu$ , όπου  $0,3 < \mu < 0,5$ .

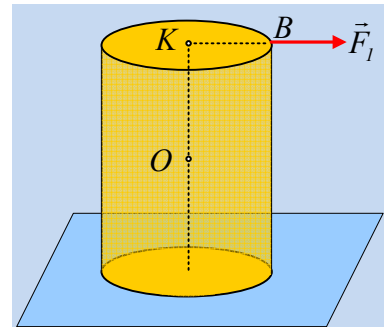
Σε μια στιγμή δέχεται μια δύναμη  $\vec{F}$ , μέτρου  $F=\mu Mg\sqrt{2}$ , η οποία ασκείται σε ένα σημείο  $A$  της παράπλευρης επιφάνειάς του, το οποίο απέχει κατά  $R$  από την πάνω έδρα του και ο φορέας της περνά από το κέντρο μάζας του  $O$ .



i) Ο κύλινδρος θα:

- α) παραμείνει ακίνητος.
- β) ολισθήσει χωρίς να ανατραπεί.
- γ) ανατραπεί, χωρίς να ολισθήσει.
- δ) θα ολισθήσει και θα ανατραπεί.

ii) Στο σημείο  $B$  της πάνω έδρας ασκούμε οριζόντια δύναμη  $F_1$ , η οποία έχει την διεύθυνση της ακτίνας  $KB$ . Αν το μέτρο της ασκούμενης δύναμης αυξάνεται (ξεκινώντας από μηδενική τιμή), τι θα συμβεί πρώτα, ολίσθηση του κυλίνδρου ή ανατροπή του;



#### Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο όπου ο φορέας της δύναμης στήριξης (κάθετης αντίδρασης  $N$ ) απέχει κατά  $x$ , από το κέντρο μάζας  $O$ , ενώ η γωνία  $\varphi=45^\circ$ . Αλλά τότε:

$$F_x = F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = \mu Mg\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mu Mg$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύλινδρος ισορροπεί, αφού η συνισταύσα  $F_y$  είναι μικρότερη του βάρους και δεν μπορεί να ανυψώσει τον κύλινδρο. Αλλά τότε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N + F_y - w = 0 \rightarrow$$

$$N = Mg - F_y = Mg - \mu Mg = (1 - \mu)Mg$$

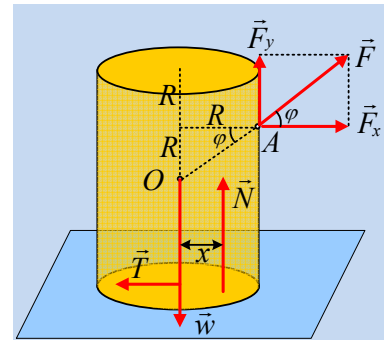
$$\text{Και } T_{op} = T_{ol} = \mu \cdot N = \mu \cdot (1 - \mu) \cdot Mg.$$

$$\text{Οπότε } F_x - T_{op} = \mu Mg - \mu Mg + \mu^2 Mg = \mu^2 Mg > 0$$

Και ο κύλινδρος επιταχύνεται προς τα δεξιά.

Ας υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος δεν θα ανατραπεί, οπότε  $\Sigma \tau_O = 0$ , οπότε:

$$T \cdot 2R + F \cdot 0 + w \cdot 0 - N \cdot x = 0 \rightarrow$$



$$x = \frac{2TR}{N} = \frac{2 \cdot \mu(1-\mu)Mg \cdot R}{(1-\mu)Mg} = 2\mu \cdot R < R$$

Συνεπώς η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, περνά από τη βάση του κύλινδρου και η υπόθεσή μας είναι σωστή. (Ο κύλινδρος αρχίζει να ανατρέπεται όταν ο μοχλοβραχίονας της  $N$  γίνει ίσος με  $R$ , οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να στρέφεται γύρω από το σημείο  $B$ ).

Σωστή η β) πρόταση.

- ii) Η δύναμη  $F_1$  (όπως και η τριβή) είναι οριζόντια, οπότε από την ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w = Mg$$

Έστω ότι αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της οριζόντιας δύναμης  $F_1$ .

Ο κύλινδρος τείνει να ολισθήσει, όταν  $F_1 = T_{op} = \mu_s \cdot N = \mu \cdot Mg$ .

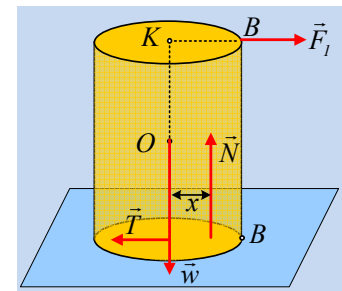
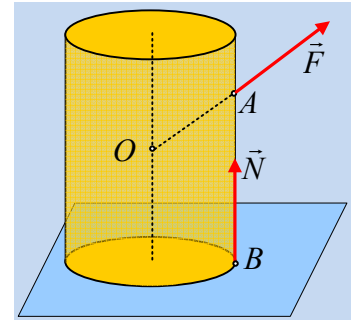
Ας **υποθέσουμε** τώρα ότι ενώ ο κύλινδρος τείνει να ολισθήσει, δεν ανατρέπεται, πράγμα που σημαίνει ότι ο φορέας της  $N$ , δεν έχει φτάσει στο σημείο  $B$ , αλλά περνάει από τη βάση στήριξης.

Τότε  $\Sigma \tau_O = 0$  ή

$$-T \cdot 2R - F_1 \cdot 2R + N \cdot x = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{2TR + 2F_1R}{N} = \frac{4TR}{N} = \frac{4 \cdot \mu Mg \cdot R}{Mg} = 4\mu \cdot R > R$$

Πράγμα που σημαίνει ότι πριν φτάσουμε στο σημείο να ολισθήσει ο κύλινδρος, θα ανατραπεί στρεφόμενος γύρω από το σημείο  $B$ .



### Σχόλια:

- 1) Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με αντίστροφη πορεία στο ii) ερώτημα.

Έστω ο κύλινδρος τείνει να ανατραπεί πριν αρχίσει να ολισθαίνει. Τότε η κάθετη αντίδραση  $N$  ασκείται στο σημείο  $B$ , ενώ ο κύλινδρος ισορροπεί. Αλλά τότε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_1 = T_s$$

$$\text{Και } \Sigma \tau_O = 0 \text{ ή } N \cdot R - F_1 \cdot 2R - T_s \cdot 2R = 0 \rightarrow$$

$$N = 4T_s \rightarrow T_s = \frac{1}{4} Mg.$$

Η τελευταία εξίσωση επιβεβαιώνει ότι η ασκούμενη τριβή είναι στατική, αφού η οριακή τριβή παίρνει τιμές μεγαλύτερες από  $0,3Mg$ .

- 2) Στην περίπτωση που έχουμε εξασφαλίσει ότι ο κύλινδρος δεν επιταχύνεται, όπως στην προηγούμενη υπόθεσή μας, η εξίσωση  $\Sigma \tau = 0$ , θα ισχύει ως προς οποιοδήποτε σημείο (αφού έχουμε ισορροπία). Θα μπορούσαμε δηλαδή να μην πάρουμε τις ροπές ως προς το κέντρο μάζας  $O$ , αλλά ως προς το σημείο  $B$ .

$$\Sigma \tau_B = 0 \rightarrow w \cdot R - F_I \cdot 4R = 0 \rightarrow F_I = \frac{1}{4} Mg$$

Και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

**Προσοχή** όμως, αυτό δεν θα μπορούσαμε να το επικαλεστούμε στο πρώτο ερώτημα, αφού ο κύλινδρος επιταχύνεται. Οπότε το αν στρέφεται ή όχι, θα μας το εξασφαλίσει η συνολική ροπή ως προς το κέντρο μάζας Ο και όχι ως προς οποιοδήποτε σημείο.

### Υλικό Φυσικής-Χημείας

*Γιατί το να μοιάζεισαι πράγματα, είναι καλό για όλους...*

Επιμέλεια:

*Διονόσης Μάργαρης*