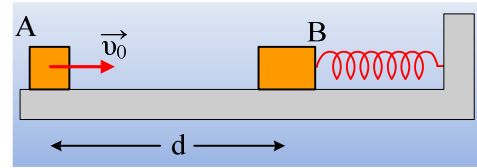


Πόσο τελικά θα απέχουν τα δυο σώματα;

Σε ένα οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ αντίστοιχα απέχοντας κατά $d=1\text{m}$. Το B σώμα είναι δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k=40\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του. Ο συντελεστής τριβής των σωμάτων με το επίπεδο είναι $\mu=0,8$, ενώ $g=10\text{m/s}^2$. Σε μια στιγμή εκτοξεύεται το σώμα A με αρχική ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$, με κατεύθυνση προς το σώμα B και κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα.



- i) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος A ελάχιστα πριν την κρούση.
- ii) Ποιες οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την μετωπική ελαστική τους κρούση;
- iii) Ποια θα είναι τελικά η απόσταση των δύο σωμάτων όταν ακινητοποιηθούν;
- iv) Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του A σώματος μετατρέπεται συνολικά σε θερμική ενέργεια εξαιτίας της τριβής;

Απάντηση:

- i) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος A από την αρχική θέση, μέχρι ελάχιστα πριν την κρούση και παίρνουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_{N1} + W_{T1} \quad (1)$$

Όπου $W_w = W_N = 0$, αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στην μετατόπιση, ενώ από την ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε $N = W = m_1g$ και άρα $T_1 = \mu \cdot N_1 = \mu m_1g$, οπότε η (1) δίνει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g d \rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 0,8 \cdot 10 \cdot 1} \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

- ii) Για τις ταχύτητες μετά την κεντρική ελαστική κρούση των δύο σωμάτων έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1 - 2}{1 + 2} 3 \text{ m/s} = -1 \text{ m/s}$$

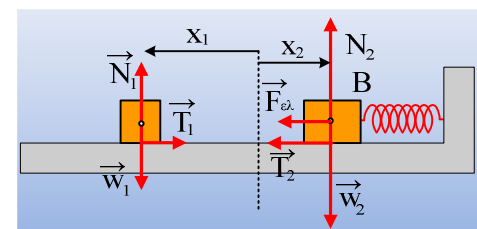
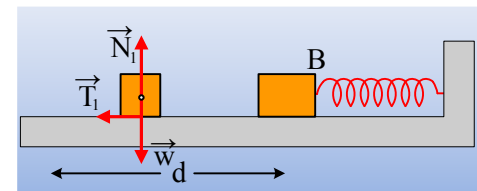
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 2} 3 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

- iii) Το A σώμα θα κινηθεί προς τα αριστερά και στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του μέχρι να σταματήσει και έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_{N1} + W_{T1} \rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 0 + 0 - \mu m_1 g \cdot x_{\text{ολ}} \rightarrow$$



$$x_{1ολ} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10} m = \frac{1}{16} m$$

Εξάλλου το Β σώμα θα κινηθεί προς τα δεξιά και με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. μέχρι τη θέση που θα μηδενιστεί η ταχύτητά του παίρνουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w2} + W_{N1} + W_{T2} + W_{Fελ} \rightarrow$$

Όπου επίσης $W_{w2} = W_{N2} = 0$, $T_2 = \mu m_2 g$ ενώ $W_{Fελ} = U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ}$, οπότε:

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0 + 0 - \mu m_2 g \cdot x_2 + 0 - \frac{1}{2} k x_2^2 \rightarrow$$

$$20x_2^2 + 16x_2 - 4 = 0 \rightarrow 5x_2^2 + 4x_2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 5}}{2 \cdot 5} m \rightarrow$$

$$x_2 = 0,2m \text{ ή } x_2 = -1m$$

όπου η αρνητική τιμή απορρίπτεται, αφού x_2 είναι το **μέτρο** της μετατόπισής του.

Το ερώτημα που ανακύπτει είναι τι θα κάνει το σώμα Β, μετά τον μηδενισμό της ταχύτητάς του;

Εξαιτίας της δύναμης του ελατηρίου, το σώμα τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά, αλλά τότε η τριβή αλλάζει φορά, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά $F_{ελ} = k \cdot x_2 = 40 \cdot 0,2N = 8N$ ενώ $T_{op} = \mu m_2 g = 0,8 \cdot 2 \cdot 10N = 16N$, συνεπώς η δύναμη του ελατηρίου, δεν μπορεί να κινήσει το σώμα, το οποίο θα παραμένει ακίνητο δεχόμενο στατική τριβή μέτρου $T_{στ} = 8N$.

Συνεπώς η τελική απόσταση των δύο σωμάτων όταν σταματήσουν είναι $d_1 = x_1 + x_2 = 0,2625m$.

Να σημειωθεί εδώ, ότι δεν μας δόθηκε ο συντελεστής της οριακής στατικής τριβής, οπότε δεχτήκαμε ότι είναι ίσος με τον συντελεστή της τριβής ολίσθησης.

iv) Αρχικά η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με την κινητική ενέργεια του Α σώματος, δηλαδή:

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5^2 J = 12,5J.$$

Τελικά η μόνη μορφή μηχανικής ενέργειας, είναι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου:

$$U_{τελ} = \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 0,2^2 J = 0,8J$$

Άρα η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, η οποία μετατρέπεται σε θερμική είναι $K_{αρχ} - U_{τελ}$ και το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{αρχ} - U_{τελ}}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{12,5 - 0,8}{12,5} 100\% = 93,6\%$$

Σχόλιο:

Προφανώς θα μπορούσαμε να βρούμε την θερμική ενέργεια από τα έργα των δύο τριβών:

$$Q_0 = |W_{T1}| + |W_{T2}| = T_1(d+x_1) + T_2 \cdot x_2 = \mu m_1 g \cdot (d+x_1) + \mu m_2 g \cdot x_2 \rightarrow$$

$$Q_0 = 0,8 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1,0625J + 0,8 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,2J = 11,7J$$

Προτιμήθηκε η πρώτη αντιμετώπιση, επειδή μας καλύπτει σε κάθε περίπτωση που μπορεί να έχουμε και μη

ελαστική κρούση. Ουσιαστικά, προτιμήθηκε ο υπολογισμός της αρχικής και τελικής μηχανικής ενέργειας και μέσω αυτού η απώλεια της μηχανικής ενέργειας.

dmargaris@sch.gr