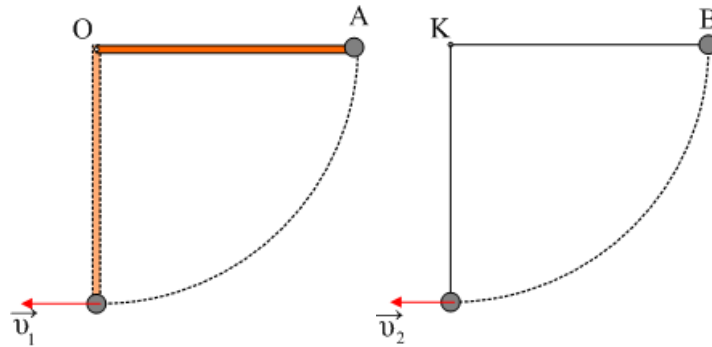


Στο άκρο νήματος ή στο άκρο ράβδου;



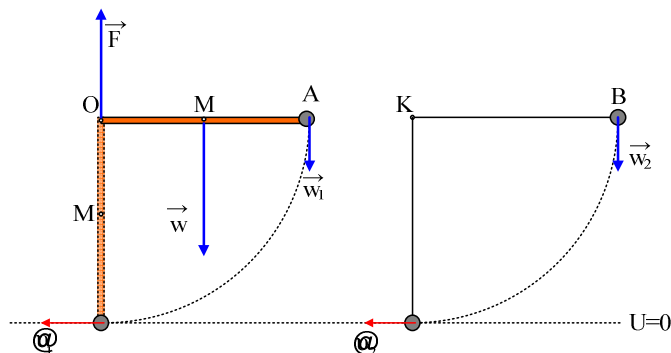
Δυο σφαίρες A και B έχουν την ίδια μάζα $m=1\text{kg}$. Η σφαίρα A προσκολλάται στο άκρο ομογενούς ράβδου μάζας $M=3\text{kg}$ και μήκους $l=1,25\text{m}$ η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άλλο της άκρο O. Η B σφαίρα δένεται στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $\ell=1,25\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο K. Φέρνουμε τις δύο σφαίρες σε θέσεις τέτοιες ώστε η ράβδος και το νήμα να είναι οριζόντια, όπως στο σχήμα και σε μια στιγμή τις αφήνουμε ελεύθερες να κινηθούν.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λαθεμένες.

- i) Οι δύο σφαίρες θα αποκτήσουν την ίδια αρχική επιτάχυνση.
- ii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας B, ως προς το K έχει μέτρο $\frac{dL}{dt} = mg\ell$.
- iii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας A, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το O έχει μέτρο $\frac{dL}{dt} = mg\ell$.
- iv) Στην κατακόρυφη θέση οι δύο σφαίρες θα έχουν ίσες ταχύτητες $v_1=v_2$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $\frac{1}{3}m\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:



- i) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος-σφαίρα A καθώς και στη σφαίρα B.

Στην πρώτη περίπτωση:

Θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές παίρνουμε:

$$\Sigma \tau = I_{\text{ολ}} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

Όπου η ροπή αδράνειας είναι:

$$I = \frac{1}{3} Ml^2 + ml^2 = 1/3 \cdot 3 \cdot 1,25^2 + 1 \cdot 1,25^2 = \frac{25}{8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$Mg \cdot \ell/2 + mg \cdot \ell = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{30 \cdot \frac{5}{8} + 10 \cdot \frac{5}{4}}{\frac{25}{8}} = \frac{\frac{250}{8}}{\frac{25}{8}} \text{ rad} / \text{s}^2 = 10 \text{ rad} / \text{s}^2$$

Οπότε η σφαίρα έχει επιτάχυνση

$$\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell = 10 \cdot 1,25 = 12,5 \text{ m/s}^2$$

Για τη σφαίρα B:

$$\Sigma F_y = m\alpha_B \rightarrow mg = ma \rightarrow \alpha_B = g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η A σφαίρα αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση από την B

ii) Η πρόταση είναι σωστή αφού $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_K = mg \cdot \ell = 12,5 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$.

iii) Η πρόταση είναι λάθος και αυτό γιατί το βάρος δεν είναι η μοναδική δύναμη που ασκείται στην A σφαίρα. Δέχεται δύναμη και από την ράβδο, γι' αυτό άλλωστε απέκτησε και επιτάχυνση μεγαλύτερη από g. Ο αντίστοιχος ρυθμός έχει μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = I_A \cdot a_{\gamma\omega\nu} = ml^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{125}{8} \text{ kgm}^2 / \text{s}^2$$

Ο ρυθμός αυτός θα μπορούσε να υπολογιστεί αντιμετωπίζοντας τη σφαίρα ως υλικό σημείο, οπότε:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(mvl)}{dt} = ml \frac{dv}{dt} = mal$$

άρα

$$\frac{dL}{dt} = mal = 1 \cdot 12,5 \cdot 1,25 = \frac{125}{8} \text{ kgm}^2 / \text{s}^2$$

iv) Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το κατώτερο σημείο της τροχιάς των σφαιρών, εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ και στις δύο περιπτώσεις και έχουμε:

Για το σύστημα ράβδος-σφαίρα A

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$Mg; + mg; = Mg; / 2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(M + 2m)gl}{I}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ rad} / \text{s}$$

Οπότε η σφαίρα A έχει ταχύτητα:

$$v_A = \omega \cdot \ell = 2,5\sqrt{5} \text{ m/s}$$

Αντίστοιχα για την σφαίρα B:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$mg = \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25} = 5 \text{ m/s}$$

Προφανώς η Α σφαίρα φτάνει στην κατακόρυφη θέση με μεγαλύτερη ταχύτητα από την σφαίρα Β.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης