

Οι βασικές εξισώσεις σε ένα τρέχον κύμα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (θετική φορά), διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Το κύμα φτάνει τη στιγμή $t_0=0$ σε σημείο O, όπου η αρχή $x=0$ του άξονα, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά). Το O περνά ξανά από την αρχική θέση ισορροπίας του τη στιγμή $t_1=0,5s$ έχοντας διανύσει διάστημα $0,4m$, ενώ τη στιγμή αυτή το κύμα φτάνει σε σημείο B στη θέση $x_B=1m$.

- i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος και για τον θετικό ημιάξονα x τη χρονική στιγμή $t_2=1,75s$.
- iii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:
 - α) της απομάκρυνσης, β) της ταχύτητας και γ) της επιτάχυνσης του σημείου Γ στη θέση $x_\Gamma=3m$.

Απάντηση:

- i) Το σημείο ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του και επανέρχεται σε αυτήν ξανά τη στιγμή t_1 , αλλά τότε το χρονικό αυτό διάστημα αντιστοιχεί σε μισή περίοδο.

$$t_1 = \frac{T}{2} \rightarrow T = 1s. \text{ Εξάλλου το διάστημα που στο μεταξύ έχει διανύσει το σημείο O, θα}$$

είναι $s=A+A$, οπότε $A = \frac{1}{2}s = 0,2m$. Συνεπώς το σημείο O εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_o = A \cdot \eta\mu\omega t = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης του κύματος έχουμε $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_B}{t_1} = \frac{1m}{0,5s} = 2m/s$, ενώ:

$$v = \lambda f \rightarrow \lambda = v/f = v \cdot T = 2m.$$

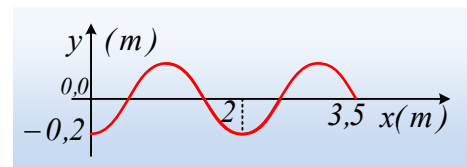
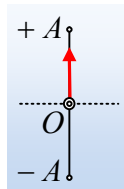
Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής $y = A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ ή

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2t \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

- ii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $t=1,75s$ παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(1,75 - \frac{x}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(1,75 - \frac{x}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu(3,5\pi - \pi x) \text{ ή}$$



$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \pi x\right) = -0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \text{ με } x \leq 2t \text{ ή } x \leq 3,5\text{m}$$

Με γραφική παράσταση, όπως στο διπλανό σχήμα.

iii) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Γ είναι:

$$y_{\Gamma} = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{3}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3\pi) = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi)$$

Τη στιγμή t_3 που το κύμα φτάνει στο σημείο Γ, η φάση της απομάκρυνσής του, $\varphi_{\Gamma} = (2\pi t - 3\pi)$ είναι μηδενική, οπότε:

$$(2\pi t - 3\pi) = 0 \rightarrow t_3 = 1,5\text{s}$$

Δηλαδή το κύμα φτάνει τη στιγμή $t_3=1,5\text{s}$ στο Γ, όπου αρχίζει και η ταλάντωσή του. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας και την εξίσωση ορισμού της ταχύτητας του κύματος:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{d}{v} = \frac{x}{v} = \frac{3}{2}\text{s} = 1,5\text{s}$$

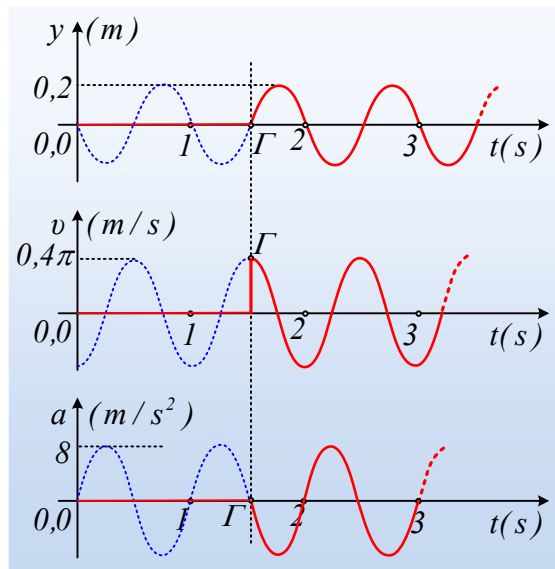
Αλλά τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του Γ είναι:

$$v_{\Gamma} = 0,2 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 3\pi) = -0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) \quad t \geq 1,5\text{s}$$

Ενώ της επιτάχυνσης:

$$a_{\Gamma} = -A\omega^2 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3\pi) = -0,2 \cdot 4\pi^2 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi) = 8 \cdot \eta\mu(2\pi t) \quad t \geq 1,5\text{s}$$

Συνεπώς οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις έχουν τη μορφή:

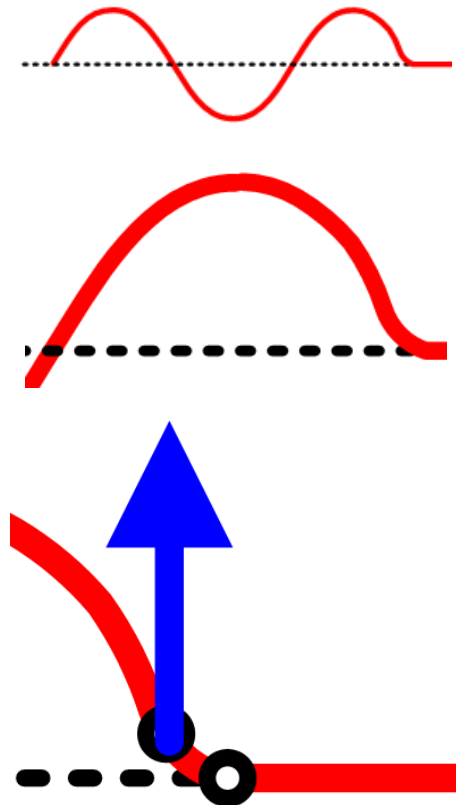


Σχόλιο:

Το κύμα φτάνει στο σημείο Γ τη στιγμή $t_3=1,5\text{s}$. Τη στιγμή αυτή το σημείο Γ είναι στη θέση ισορροπίας του και αρχίζει να κινείται προς την θετική κατεύθυνση. Πώς όμως γίνεται, μια ακίνητη σημειακή μάζα, που βρίσκεται στο Γ, ξαφνικά να αποκτά μέγιστη ταχύτητα $0,4\pi \text{ m/s}$, χωρίς να χρειαστεί κάποιο χρονικό διάστη-

μα για την επιτάχυνσή του; **Απλά δεν γίνεται!** Η όλη κατάσταση δεν είναι παρά μια μαθηματική προσέγγιση, με την έννοια ότι το κύμα που μελετάμε είναι ένα «μαθηματικό κύμα». Στην πραγματικότητα, ένα υλικό σημείο που βρίσκεται στο Γ, θα αρχίσει να επιταχύνεται προς τα πάνω, ξεκινώντας από την ηρεμία και στο μέτωπο του κύματος δεν μπορούμε να έχουμε απόλυτα ημιτονοειδή μορφή στο κύμα που διαδίδεται.

Με άλλα λόγια **θεωρούμε** ότι η μορφή είναι αρμονική, ενώ στην πραγματικότητα αν μεγεθύνουμε, θα μπορούσαμε να είχαμε τις παρακάτω εικόνες, όπου ακόμη και στην πρώτη μπορούμε να διακρίνουμε μια παραμόρφωση της καμπύλης και το «σπάσιμο της αρμονικότητας»:



Περισσότερα για την άρση της «αντίφασης» μπορείτε να διαβάσετε [εδώ](#).

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης