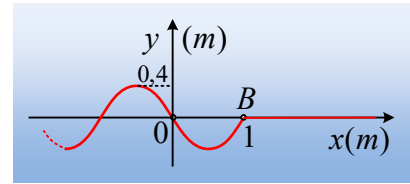


Σειρά για μια τρίτη εξίσωση κύματος!!!

Στο σχήμα δίνεται η μορφή ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, κατά μήκος του οποίου διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, από αριστερά προς τα δεξιά, τη χρονική στιγμή $t_1=1s$. Η περίοδος του κύματος είναι $T=1s$.



- i) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου B σε συνάρτηση με το χρόνο.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιαστεί ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=3s$, για το θετικό ημιάξονα x.
- iv) Να βρεθούν στη περιοχή $-1m \leq x \leq 4m$ τα σημεία, τα οποία τη στιγμή $t_2=1,5s$ έχουν απομάκρυνση $y=+0,2m$.

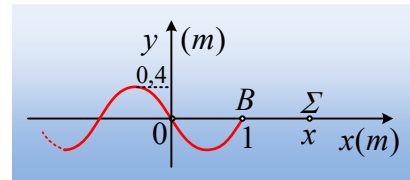
Απάντηση:

- i) Το σημείο B θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση πλάτους 0,4m, όπου ξεκινά από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, συνεπώς θα έχει αρχική φάση $\varphi_0=\pi$ rad με συχνότητα $f=1Hz$. Συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσής του θα είναι της μορφής:

$$y_B = A \cdot \eta\mu(\omega\Delta t + \varphi_0) \rightarrow y_B = 0,4 \cdot \eta\mu[2\pi(t-1) + \pi] \rightarrow$$

$$y_B = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{1}{2} \right) \text{ με } t \geq 1s \text{ και μονάδες στο S.I.}$$

- ii) Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ στη θέση x. Τα σημείο Σ θα εκτελέσει μια ταλάντωση, ίδια ακριβώς με την ταλάντωση του σημείου B, με μόνη διαφορά, ότι θα καθυστερήσει να αρχίσει την ταλάντωσή του, σε σχέση με το B, αφού το κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα $v=\lambda f$



καθυστερεί να φτάσει στο Σ, κατά $t' = \frac{s}{v} = \frac{B\Sigma}{\lambda f} = \frac{x-1}{2}$. Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left((t-t') - \frac{1}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left[\left(t - \frac{x-1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \rightarrow$$

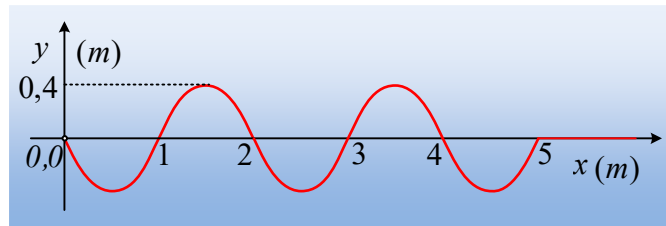
$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \text{ (S.I.) με } x \leq 1+2(t-1) \quad (1)$$

- iii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος (1) $t_1=3s$ παίρνουμε:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(3 - \frac{x}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu(6\pi - \pi x) = -0,4 \cdot \eta\mu(\pi x)$$

Με $x \leq 1+2(t-1)$ ή $x \leq 5m$.

Οπότε το ζητούμενο στιγμιότυπο έχει τη μορφή:



iv) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος (1) $t_2=1,5s$ παίρνουμε:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(1,5 - \frac{x}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu (3\pi - \pi x) = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi x)$$

Με $x \leq 1+2(t-1)$ ή $x \leq 2m$, συνεπώς αναζητούμε τα σημεία, όχι μέχρι τη θέση $x=4m$ αλλά στην περιοχή $-1m \leq x \leq 2m$.

Θέλουμε τα σημεία με απομάκρυνση $y=0,2m$. Οπότε:

$$0,2 = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi x) \rightarrow \eta\mu(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu(\pi x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = 2k\pi + \pi/6 \rightarrow x = 2k + 1/6 & (3) \\ \pi x = 2k\pi + 5\pi/6 \rightarrow x = 2k + 5/6 & (4) \end{cases}$$

Από την (3): $-1 \leq 2k + 1/6 \leq 2 \rightarrow -7/12 \leq k \leq 11/12$, οπότε $k=0$ και $x = 1/6m$.

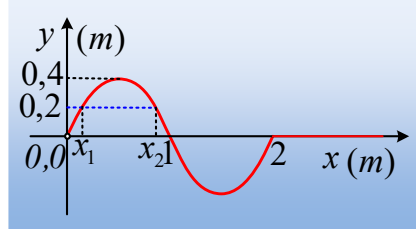
Από την (4): $-1 \leq 2k + 5/6 \leq 2 \rightarrow -11/12 \leq k \leq 7/12$, οπότε $k=0$ και $x = 5/6m$.

Σχόλια:

- 1) Η εξίσωση του κύματος που βρήκαμε, εξίσωση (1), έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση του σχολικού βιβλίου. Παρόλα αυτά περιγράφει ένα εντελώς διαφορετικό κύμα. Δεν έχει σημασία μόνο η συγκεκριμένη μορφή που γράφεται η εξίσωση, αλλά και το πεδίο ορισμού της. Έτσι η εξίσωση του βιβλίου ισχύει αν τη στιγμή $t=0$ το κύμα περνά από τη θέση $x=0$ ενώ το σημείο αυτό ξεκινά να ταλαντώνεται προς τη θετική κατεύθυνση. Στο παραπάνω κύμα, τη στιγμή $t=0$ (αν και δεν έχουμε πληροφορίες αφού η μελέτη μας περιορίζεται για $t > 1s$) το κύμα έφτανε στη θέση $x=-1m$ και το σημείο άρχισε να ταλαντώνεται προς την αρνητική κατεύθυνση.
- 2) Όταν μας ζητάνε ένα στιγμιότυπο κύματος, συνήθως λέμε ότι το κύμα έχει διαδοθεί π.χ. εδώ, κατά $x=v \cdot t = 2 \cdot 3m = 6m$ και προφανώς κάτι τέτοιο είναι στην περίπτωση μας, λανθασμένο. Το σωστό θα ήταν να λέγαμε ότι το κύμα έχει διαδοθεί κατά $d=v \cdot \Delta t = 2 \cdot (3-1)m = 4m$, όπου το αποτέλεσμα μας λέει ότι έχει διαδοθεί κατά $4m$ πέρα από το σημείο B, συνεπώς φτάνει στη θέση $x=x_B+d=5m$!
- 3) Ένα άλλος τρόπος για να βρούμε μέχρι ποιο σημείο θα σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο, είναι να εργαστούμε με τη βοήθεια της φάσης. Αλλά και εδώ χρειάζεται προσοχή. Το σημείο B στο οποίο φτάνει το κύμα έχει αρχική φάση π , οπότε και για κάθε σημείο, θα πρέπει να ισχύει:

$$\varphi \geq \pi \text{ ή } 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \geq \pi \rightarrow 2 \left(3 - \frac{x}{2} \right) \geq 1 \rightarrow x \leq 5\text{m}$$

- 4) Τέλος μιλώντας για το iv) ερώτημα, θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο τη στιγμή $t_2=1,5\text{s}$, όπως παρακάτω.



Στο σχήμα φαίνονται οι δυο θέσεις όπου $y=0,2\text{m}$. Η χάραξη του στιγμιότυπου μπορεί να μας προφυλάξει από σφάλματα που μπορεί να έχουμε εξαιτίας κάποιου τριγωνομετρικού λάθους στη λύση που δίνουμε...

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιάζεις πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονόσης Μάργαρης