

Μια άλλη εξίσωση κύματος.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Θεωρώντας έναν άξονα x , με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, το κύμα φτάνει τη στιγμή $t_0=0$ σε σημείο Β στη θέση $x_B=0,5m$. Το σημείο Β τη στιγμή που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει σε ακραία θέση ταλάντωσης με απομάκρυνση $0,5m$, περνώντας ξανά για πρώτη φορά από την αρχική του θέση τη στιγμή $t_1=0,5s$. Τη χρονική στιγμή $t_2=0,75s$ το κύμα φτάνει σε ένα άλλο σημείο Γ στη θέση $x_Γ=2m$.

- i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος και για τον θετικό ημιάξονα x τη χρονική στιγμή $t_3=2s$.
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση $\varphi=\varphi(t)$ της φάσης του σημείου Γ σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια ενός υλικού σημείου Δ μάζας $1mg$ το οποίο βρίσκεται στη θέση $x=1m$, τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Γ.

Απάντηση:

- i) Αφού το κύμα για να διαδοθεί από το Β στο Γ χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_0=0,75s$, η ταχύτητα διάδοσής του είναι:

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_{\Gamma} - x_B}{t_2} = \frac{2m - 0,5m}{0,75s} = 2m/s$$

Αλλά για να μεταβεί ένα υλικό σημείο που ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας σε μέγιστη απομάκρυνση και να επιστρέψει ξανά στη θέση ισορροπίας του, χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2}$, όπου

T η περίοδος της ταλάντωσης. Οπότε $T=2 \cdot t_1=1s$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Β θα είναι της μορφής:

$$y_B = A \cdot \eta \mu \omega t \quad \text{ή}$$

$$y_B = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \quad (\text{S.I})$$

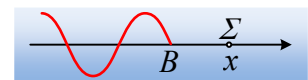
Αλλά τότε το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει στο τυχαίο σημείο Σ, στη θέση x κατά:

$$t' = \frac{d}{v} = \frac{x - x_B}{v} = \frac{x - 0,5}{2}$$

Ενώ στη συνέχεια θα εκτελέσει μια όμοια ταλάντωση με εξίσωση:

$$y = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi(t - t') = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{x - 0,5}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 0,5 + 2t \quad (\text{μονάδες στο S.I.)} \quad (1)$$



Η εξίσωση (1) μας δίνει την απομάκρυνση του τυχαίου σημείου του μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο και τη θέση του, συνεπώς είναι η εξίσωση του κύματος.

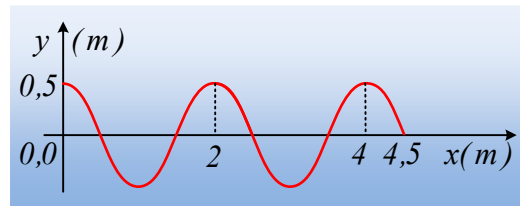
ii) Με αντικατάσταση στην (1) $t=t_3=2s$ έχουμε:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu (4,5\pi - \pi x) \rightarrow$$

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu (4,5\pi - \pi x) = 0,5 \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right) = 0,5 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad (2)$$

Με $x \leq 0,5+2t$ ή $x \leq 4,5m$.

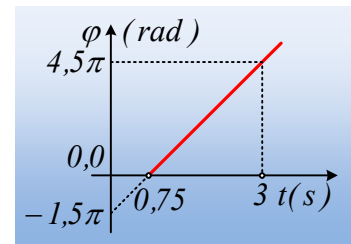
Οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2), το στιγμιότυπο του κύματος, είναι:



iii) Η φάση της απομάκρυνσης τυχαίου σημείου είναι $\varphi = 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)$,

οπότε για το σημείο Γ:

$$\varphi = 2\pi \left(t - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = 2\pi(t - 0,75) = 2\pi t - 1,5\pi \quad (\text{S.I.}) \text{ για } t \geq 0,75s$$



Με γραφική παράσταση, όπως στο διπλανό σχήμα.

iv) Τη χρονική στιγμή $t_2=0,75s$ που το κύμα φτάνει στο σημείο Γ, το υλικό σημείο που βρίσκεται στο σημείο Δ έχει απομάκρυνση ταλάντωσης:

$$y_{\Delta} = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu \left(2\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Αλλά τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του είναι:

$$v_{\Delta} = 0,5 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi t - \frac{\pi}{2} \right) = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \cdot 0,75 - \frac{\pi}{2} \right) = -\pi \quad (\text{S.I.})$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου είναι:

$$K = \frac{1}{2} m v_{\Delta}^2 = \frac{1}{2} 10^{-6} \pi^2 J \approx 5 \cdot 10^{-6} J$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης