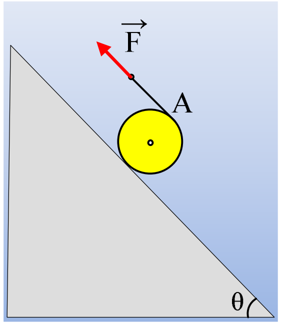
Ένας κύλινδρος σε κεκλιμένο επίπεδο.



Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας M=2kg και ακτίνας R=0,1m έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Τοποθετούμε τον κύλινδρο σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ, όπου ημθ=0,8 και τη στιγμή t_0=0 τον αφήνουμε να κινηθεί, ασκώντας σταθερή δύναμη μέτρου F=5N, στο άκρο Α του νήματος παράλληλη στο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Αν ο κύλινδρος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s$=0,25, για τη στιγμή t_1=1s, να βρεθούν:

i) Να διερευνήσετε προς τα που θα κινηθεί ο κύλινδρος, αν θα ολισθαίνει ή αν θα κυλίεται και τη φορά περιστροφής του.

ii) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και η μετατόπιση του άξονά του.

iii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

iv) η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο.

v) Οι ρυθμοί μεταβολής:

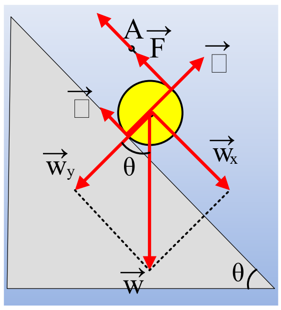
α) της στροφορμής του κυλίνδρου, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

β) της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου.

γ) της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του κυλίνδρου

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του I_{cm}= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Η συνιστώσα του βάρους η παράλληλη στο επίπεδο έχει μέτρο w_x=Mg·ημθ=2·10·0,8N=16N>F, συνεπώς ο κύλινδρος τείνει να κινηθεί προς τα κάτω και στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο. Το ερώτημα που ανακύπτει είναι: Η ασκούμενη τριβή, είναι στατική ή τριβή ολίσθησης ή ισοδύναμα ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση ή ολισθαίνει;

Έστω ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση. Θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, εφαρμόζουμε τον 2^o νόμο του Νεύτωνα και παίρνουμε:

Για την μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow Mg\cdot\eta\mu\theta - F - T = M\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Για την στροφική κίνηση, δεχόμενοι θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού:

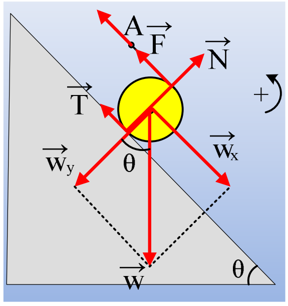
$$\Sigma\tau = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R - F\cdot R = \tfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T - F = \tfrac{1}{2}MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά αφού υποθέσαμε κύλιση χωρίς ολίσθηση $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) θα πάρουμε:

$$Mg\cdot\eta\mu\theta - 2F = \frac{3}{2}M\cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2(Mg\cdot\eta\mu\theta - 2F)}{3M} = \frac{2(2\cdot 10\cdot 0{,}8 - 2\cdot 5)}{3\cdot 2}m/s^2 = 2m/s^2$$

Και $T= F+ ½ M\cdot α_{cm}=5N+ ½ 2\cdot 2N=7N$.

Ελέγχουμε αν αυτή η τριβή μπορεί να εμφανιστεί, υπολογίζοντας την μέγιστη δυνατή τιμή της στατικής τριβής (οριακή τριβή) $T_{ορ}=μ_s\cdot N=μ_s\cdot Mg\cdot συνθ= 0,25\cdot 2\cdot 10\cdot 0,6N=3N=T_{ολ}$. Άρα τριβή 7N δεν μπορεί να ασκηθεί και οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Ο κύλινδρος ολισθαίνει και η τριβή είναι τριβή ολίσθησης μέτρου 3N (από την ισότητα των δυο συντελεστών τριβής).



Αλλά τότε η δύναμη F έχει μεγαλύτερο μέτρο από την τριβή, συνεπώς έχει αντίστοιχα μεγαλύτερη ροπή, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού κινούμενος προς τα κάτω. Να το διατυπώσουμε αλλιώς «παίρνει ανάποδες στροφές».

ii) Επανερχόμενοι λοιπόν στις προηγούμενες εξισώσεις έχουμε:

$$ΣF_x=M\cdot α_{cm} \rightarrow Mg\cdot ημθ-F-T= M\cdot α_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{Mg\cdot ημθ - F - T}{M} = \frac{2\cdot 10\cdot 0,8 - 5 - 3}{2} m/s^2 = 4m/s^2$$

Και $Στ=I_{cm}\cdot α_{γων} \rightarrow F\cdot R-T\cdot R= ½ MR^2\cdot α_{γων} \rightarrow a_{γων} = \frac{2(F-T)}{MR} = \frac{2(5-3)}{2\cdot 0,1} rad/s^2 = 20 rad/s^2$

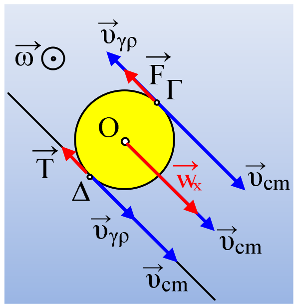
Ενώ η μετατόπιση του άξονα του κυλίνδρου είναι $x= ½ α_{cm}\cdot t^2=2m$.

iii) Για τις ταχύτητες τη στιγμή $t_1=1s$ έχουμε:

$$υ_{cm}=α_{cm}\cdot t_1=4m/s \text{ και } ω=α_{γων}\cdot t_1=20rad/s.$$

iv) Για την ισχύ μιας δύναμης γνωρίζουμε ότι υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cdot dx\cdot συνα}{dt} = F\cdot υ\cdot συνα$$



Όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του σημείου στο οποίο εφαρμόζεται και α η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητας.

Στην περίπτωσή μας έχουμε:

$$υ_Γ=υ_{cm}-υ_{γρ}= υ_{cm}-ω\cdot R=4m/s-20\cdot 0,1 \text{ m/s}=2m/s \text{ και}$$

$$υ_Δ= υ_{cm}+ υ_{γρ}= υ_{cm} + ω\cdot R=4m/s + 20\cdot 0,1 \text{ m/s}=6m/s$$

για τις ταχύτητες των αντιδιαμετρικών σημείων του κυλίνδρου Γ και Δ που εφαρμόζονται οι δυο δυνάμεις και η παραπάνω σχέση δίνει:

$$P_w=P_{wx}=Mg\cdot ημθ\cdot υ_{cm}=2\cdot 10\cdot 0,8\cdot 4J/s=64J/s.$$

$$P_F=F\cdot υ_Γ\cdot συν180° = -5\cdot 2J/s= -10J/s.$$

$$P_T=T\cdot υ_Δ\cdot συν180° = -3\cdot 6J/s= -18J/s.$$

v) Για τους ζητούμενους ρυθμούς:

α) $\frac{dL}{dt} = Στ = F\cdot R - T\cdot R = (5\cdot 0,1 - 3\cdot 0,1) kg\cdot m^2/s^2 = 0,2 kg\cdot m^2/s^2$

με διεύθυνση αυτή του άξονα και φορά προς τα έξω.

β) $\frac{dK}{dt} = P_{o\lambda} = Mg\eta\mu\theta \cdot \upsilon_{cm} - F \cdot \upsilon_{\Gamma} - T \cdot \upsilon_{\Delta} \rightarrow$

$$\frac{dK}{dt} = Mg\eta\mu\theta \cdot \upsilon_{cm} - F \cdot \upsilon_{\Gamma} - T \cdot \upsilon_{\Delta} = (2 \cdot 10 \cdot 0{,}8 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 6)J/s = 36J/s$$

γ) $\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = P_{\tau} = P\tau_F + P\tau_T = FR \cdot \omega - TR \cdot \omega = (5 \cdot 0{,}1 \cdot 20 - 3 \cdot 0{,}1 \cdot 20)J/s = 4J/s$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ισχύ της δύναμης, με βάση τη λογική ότι παράγει έργο σαν δύναμη (όσον αφορά τη μεταφορική κίνηση) και έργο αν ροπή (για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου).

έτσι θα είχαμε για την δύναμη F:

$P_F = F \cdot \upsilon_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu 180° + \tau \cdot \omega = -F \cdot \upsilon_{cm} + FR \cdot \omega = 5 \cdot 4 \cdot (-1)W + 5 \cdot 0{,}1 \cdot 20W = -20W + 10W = -10W.$

Ενώ για την τριβή:

$P_T = T \cdot \upsilon_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu 180° - \tau \cdot \omega = -T \cdot \upsilon_{cm} - TR \cdot \omega = 3 \cdot 4 \cdot (-1)W - 3 \cdot 0{,}1 \cdot 20W = -12W - 6W = -18\ W.$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης