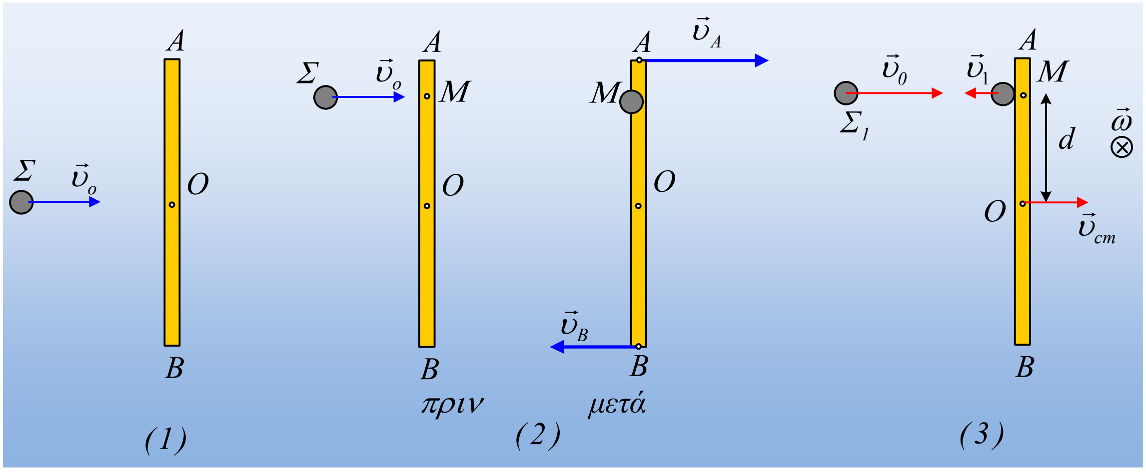
Κρούση και κέντρο μάζας.

Μια ομογενής ράβδος μάζας 3m και μήκους ℓ=6m ηρεμεί σε οριζόντια θέση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα σώμα Σ μάζας m που θεωρείται υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα υ_0=8m/s, σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και προσκολλάται σε αυτήν, στο μέσον της Ο.

i) Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση.

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα το σώμα Σ προσκολλάται στο σημείο Μ της ράβδου δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S. Αμέσως μετά την κρούση τα άκρα Α και Β της ράβδου έχουν ταχύτητες μέτρων υ_A=4,5m/s και υ_B=1,5m/s, όπως στο (2) σχήμα. Να βρεθούν:



ii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού S.

iii) Η θέση του κέντρου μάζας Κ γύρω από το οποίο στρέφεται το σύστημα μετά την κρούση.

iv) Ποιο είναι στην περίπτωση αυτή, το αντίστοιχο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση;

Σε μια επανάληψη του πειράματος, το σώμα Σ αντικαθίσταται από άλλο Σ_1 ίδιας μάζας, το οποίο κτυπά ξανά τη ράβδο στο σημείο Μ, με την ίδια ταχύτητα υ_0. Μετά την κρούση το Σ_1, κινείται προς τ' αριστερά με ταχύτητα μέτρου υ_1=1m/s.

v) Ποιο είναι τώρα το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=\frac{1}{12}m\ell^2$.

Απάντηση:

i) Εφαρμόζουμε για την κρούση την Α.Δ.Ο. και έχουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$m\upsilon_0=(m+3m)\cdot\upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$\upsilon_\kappa = \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon_0}{4} = 2m/s$$

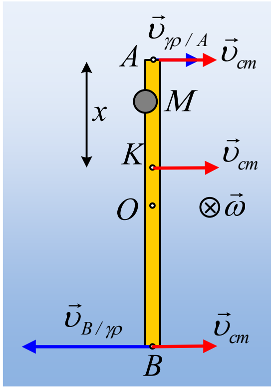
Αλλά τότε το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική είναι:

$$\pi = \frac{|\Delta K|}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - \frac{1}{2}(m+3m)\upsilon_\kappa^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2}100\% = \left(1-\frac{4\upsilon_\kappa^2}{\upsilon_o^2}\right)100\%$$

$$\pi = \left(1-\frac{4\cdot 2^2}{8^2}\right)100\% = 75\%$$

ii) Έστω K το κέντρο μάζας του συστήματος, που απέχει κατά x από το άκρο A. Μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση σύνθετη, ως μια μεταφορική και μια περιστροφική. Για την νέα κρούση ισχύει επίσης η ΑΔΟ, όπως και παραπάνω, από την οποία βρίσκουμε ξανά ότι $\upsilon_\kappa = \upsilon_{cm} = 2m/s$.

Έτσι τα άκρα A και B της ράβδου, έχουν τις ταχύτητες που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, από όπου:



$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow$ $\upsilon_B = \upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon_{cm} \rightarrow$

$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \omega\cdot x$ (1) $\upsilon_B = \omega\cdot(\ell - x) - \upsilon_{cm}$ (2)

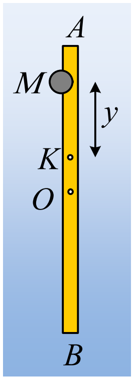
Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\upsilon_A + \upsilon_B = \omega\cdot\ell \rightarrow$$

και με αντικατάσταση $\omega = \frac{\upsilon_A + \upsilon_B}{\ell} = \frac{4,5+1,5}{6} rad/s = 1 rad/s$.

Με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε x= 2,5m, δηλαδή το κέντρο μάζας K του στερεού S, απέχει 0,5m από το μέσον O της ράβδου.

iii) Έστω ότι το σώμα Σ προσκολλάται στο σημείο M, το οποίο απέχει κατά y από το κέντρο μάζας K. Εφαρμόζουμε για την κρούση την αρχή διατήρησης της στροφορμής (ΑΔΣ), ως προς το κέντρο μάζας K του στερεού S και παίρνουμε:



$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$m\upsilon_0 y = I\cdot\omega \rightarrow$$

$$m\upsilon_0 y = \left(\frac{1}{12}3m\ell^2 + 3m(OK)^2 + my^2\right)\cdot\omega \rightarrow$$

$$m\upsilon_0 y = \left(\frac{1}{4}m\ell^2 + 3m(OK)^2 + my^2\right)\cdot\omega \rightarrow$$

$$\upsilon_0 y = \frac{1}{4}\omega\ell^2 + 3\omega(OK)^2 + \omega y^2$$

Και με αντικατάσταση:

$$y^2 - 8y + \frac{39}{4} = 0 \rightarrow$$

y=6,5m (απορ.) και y=1,5m

iv) Αλλά τότε η κινητική ενέργεια του στερεού S μετά την κρούση είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}4m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}3m\ell^2 + 3m(OK)^2 + my^2\right)\cdot\omega^2$$

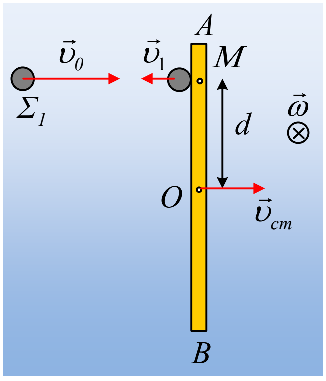
Οπότε το αντίστοιχο ποσοστό απώλειας μηχανικής ενέργειας:

$$\pi = \frac{|\Delta K|}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - \frac{1}{2}4m\upsilon_{cm}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}3m\ell^2 + 3m(OK)^2 + my^2\right)\cdot\omega^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_o^2}100\%$$

$$\pi = \frac{\upsilon_o^2 - 4\upsilon_{cm}^2 - \left(\frac{1}{4}\ell^2 + 3(OK)^2 + y^2\right)\cdot\omega^2}{\upsilon_o^2}100\%$$

Και με αντικατάσταση π=56,25%

v) Και στην παρούσα κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:



$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$m\upsilon_0 = -m\cdot\upsilon_1 + M\cdot\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{m(\upsilon_o + \upsilon_1)}{M} = \frac{m(8+1)}{3m}m/s = 3m/s.$$

Εξάλλου με βάση το προηγούμενο ερώτημα (ΜΟ)=d=2m. Αν τώρα η ράβδος μετά την κρούση εκτός της ταχύτητα $\upsilon_2 = \upsilon_O = \upsilon_{cm}$ αποκτήσει και γωνιακή ταχύτητα ω, ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της Ο, η αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς το Ο, θα μας δώσει (θεωρούμε θετική την ωρολογιακή φορά):

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$m\cdot\upsilon_0\cdot d = m\cdot\upsilon_1\cdot d + I_{cm}\cdot\omega \rightarrow$$

$$m\upsilon_0\cdot d - m\upsilon_1\cdot d + \frac{1}{12}3m\cdot\ell^2\cdot\omega \rightarrow$$

$$\omega = \frac{4(\upsilon_0 + \upsilon_1)\cdot d}{\ell^2} = \frac{4(8+1)\cdot 2}{6^2}rad/s = 2rad/s$$

Αλλά τότε για την κινητική ενέργεια θα έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m8^2 = 32m \text{ (S.I)}$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \rightarrow$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}3m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}3m\ell^2\right)\cdot\omega^2$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m1^2 + \frac{1}{2}3m3^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}3m\cdot 6^2\cdot 2^2 = 0{,}5m + 13{,}5m + 18m = 32m \text{ (S.I.)}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε απώλεια κινητικής ενέργειας, οπότε το ζητούμενο ποσοστό είναι προφανώς 0%.

Σχόλια:

1) Από τη στιγμή που βρήκαμε ότι το κέντρο μάζας στο 2^o πείραμα απέχει από το μέσον της ράβδου (ΚΟ)=0,5m θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη θέση του Μ, εστιάζοντας στις ιδιότητες του κ.μ. Επειδή όμως στην θεωρία του βιβλίου δεν υπάρχει κάτι σχετικό, προτιμήθηκε να δοθεί ένα επιπλέον δεδομένο (οι ταχύτητες των δύο άκρων και η ΑΔΣ να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της θέσης.

2) Στο 3^o πείραμα η κρούση ονομάζεται ελαστική και η μελέτη της στηρίζεται στην Α.Δ.Ο., Α.Δ.Σ. και Α.Δ.Μ.Ε. η οποία τελικά εφαρμόζεται ως $K_{\pi\rho\iota\nu}=K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$, αφού δεν υπεισέρχονται καθόλου δυναμικές ενέργειες στο πρόβλημά μας.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης