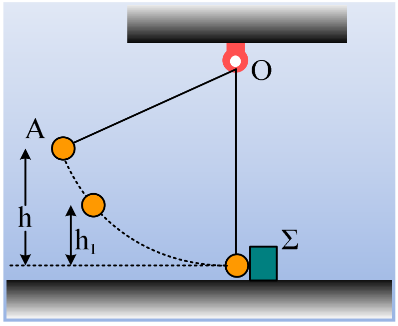
Μια ελαστική κρούση και η στροφορμή.



Μια μικρή σφαίρα μάζας m=0,1kg ηρεμεί δεμένη στο κάτω άκρο νήματος μήκους ℓ=3m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Ο, ενώ εφάπτεται σε ένα σώμα , το οποίο ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στο σημείο Α, σε ύψος h=1,25m και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά την μετωπική και ελαστική κρούση της σφαίρας με το σώμα Σ, η σφαίρα επιστρέφει φτάνοντας σε ύψος h_1=0,45m, ενώ το σώμα Σ διανύει απόσταση x=2m, μέχρι να σταματήσει. Να υπολογιστούν:

i) Η μάζα Μ του σώματος Σ.

ii) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας που οφείλεται στην κρούση.

iii) Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ και του επιπέδου.

iv) Τη στιγμή που η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος h_2=0,25m κατά την άνοδό της, να βρεθούν:

α) Η στροφορμή της σφαίρας (μέτρο και κατεύθυνση) ως προς το σημείο Ο, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της αντίστοιχης στροφορμής.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την κατακόρυφη θέση της σφαίρας. Κατά την κίνηση της σφαίρας η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$0+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+0 \rightarrow \upsilon_1=\sqrt{2gh} \quad (1)$$

$$\upsilon_1=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 1{,}25}m/s=5m/s$$

Μετά την κρούση, έστω ότι η σφαίρα αποκτά ταχύτητα μέτρου υ_1' και κινούμενη προς τα πάνω, φτάνει σε ύψος h_1, οπότε, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε από την (1), $\upsilon_1'=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}45}m/s=3m/s$.

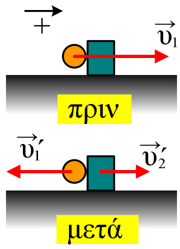
Αλλά οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κεντρική ελαστική τους κρούση δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\upsilon_1'=\frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 \quad (2) \text{ και } \upsilon_2'=\frac{2m}{m+M}\upsilon_1 \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε:

$$\upsilon_1'=\frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 \rightarrow -3=\frac{0{,}1-M}{0{,}1+M}5 \text{ από όπου M=0,4kg.}$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση. Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική παίρνουμε:



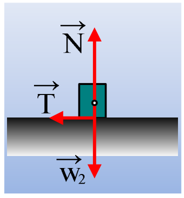
$$\Delta\vec{P}_1 = \vec{P}_{1\mu\varepsilon\tau} - \vec{P}_{1\pi\rho} \rightarrow$$

$$\Delta P_1 = m\upsilon_1' - m\upsilon_1 = 0{,}1\cdot(-3)kgm/s - 0{,}1\cdot 5kgm/s = -0{,}8kgm/s$$

iii) Με αντικατάσταση στην σχέση (3) βρίσκουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 0{,}1}{0{,}1+0{,}4}5m/s = 2m/s$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σώμα Σ για την κίνησή του μετά την κρούση και παίρνουμε:

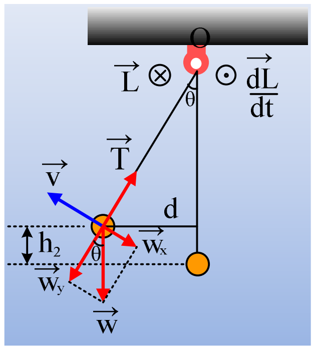


$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi}=W_{w2}+W_T+W_T. \rightarrow 0-\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 = 0+0-Tx \quad (5)$$

Αλλά το σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε $\Sigma F_y=0 \rightarrow N=Mg$, οπότε $T=\mu Mg$ και η σχέση (5) δίνει:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 = \mu Mgx \rightarrow \mu = \frac{\upsilon_2'^2}{2gx} = \frac{2^2}{2\cdot 10\cdot 2} = 0{,}1$$

iv) Έστω ότι στη θέση που η σφαίρα έχει ανέλθει κατά h_2, μετά την κρούση, έχει ταχύτητα V. Εφαρμόζοντας ξανά την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ της κατώτερης θέσης και της θέσης αυτής παίρνουμε:



$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 = \frac{1}{2}mV^2 + mgh_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 = \frac{1}{2}mV^2 + mgh_2 \rightarrow V = \sqrt{\upsilon_1'^2 - 2gh_2} \rightarrow$$

$$V = \sqrt{\upsilon_1'^2 - 2gh_2} = \sqrt{3^2 - 2\cdot 10\cdot 0{,}25}m/s = 2m/s$$

α) Στη θέση αυτή η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Ο, είναι πάνω στην κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς στο σημείο Ο με φορά προς τα μέσα (βλέπε σχήμα) και μέτρο:

$$L=m\cdot V\cdot \ell=0{,}1\cdot 2\cdot 3\ kg\cdot m^2/s= 0{,}6\ kg\cdot m^2/s.$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, έχει την ίδια διεύθυνση, αλλά φορά προς τα έξω και μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = w_x\ell = mg\ell\cdot\eta\mu\vartheta$$

Αλλά $\eta\mu\vartheta = \frac{d}{\ell} = \frac{\sqrt{\ell^2-(\ell-h_2)^2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3^2-2{,}75^2}}{3} = 0{,}4$, οπότε:

$$\frac{dL}{dt} = mg\ell\cdot\eta\mu\vartheta = 0{,}1\cdot 10\cdot 3\cdot 0{,}4\ kg\cdot m^2/s^2=1{,}2\ kg\cdot m^2/s^2.$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_w}{dt}=-mg\eta\mu\vartheta\cdot V=-0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}4\cdot 2J/s=-0{,}8J/s$$

Σχόλιο.

Θεωρώντας τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού θετική, μπορούμε να γράψουμε για τις αλγεβρικές τιμές στροφορμής και ρυθμού μεταβολής της:

$$L=m\cdot V\cdot \ell=0{,}1\cdot 2\cdot 3\ kg\cdot m^2/s=0{,}6\ kg\cdot m^2/s.$$

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=-w_x\ell=-mg\ell\cdot\eta\mu\vartheta=-1{,}2kg\cdot m^2/s^2$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης