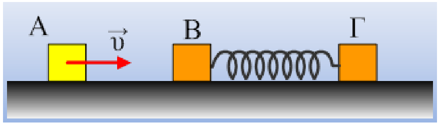
Μια κρούση και δυο «κρούσεις»…

Τα σώματα Α,Β και Γ του σχήματος έχουν ίσες μάζες και ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ τα σώματα Β και Γ είναι δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου. Κτυπώντας στιγμιαία το σώμα Α, του προσδίδουμε ταχύτητα υ πάνω στον άξονα του ελατηρίου, οπότε μετά από λίγο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το Β.



Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη των προτάσεων, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

i) Μετά την κρούση το σώμα Α θα παραμείνει ακίνητο.

ii) Η μέγιστη δυναμική ενέργεια που θα αποκτήσει το ελατήριο, θα είναι ίση με το 75% της αρχικής κινητικής ενέργειας του Α σώματος.

iii) Κάποια στιγμή του σώμα Γ, θα αποκτήσει το 100% της αρχικής κινητικής ενέργειας του Α σώματος.

Απάντηση:

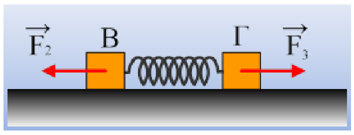
i) Τα σώματα Α και Β έχουν ίσες μάζες, οπότε μετά την μετωπική ελαστική μεταξύ τους κρούση, θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Συνεπώς το Β θα αποκτήσει ταχύτητα υ, ενώ το Α θα παραμείνει ακίνητο.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα οδηγηθούμε αν πάρουμε τους τύπους της μετωπικής ελαστικής κρούσης:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{m-m}{m+m}\upsilon = 0 \text{ και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m}{m+m}\upsilon = \upsilon$$

ii) Το Β σώμα ξεκινώντας μετά την κρούση την κίνησή του, συσπειρώνει το ελατήριο. Αλλά τότε το ελατήριο ασκεί μια δύναμη F_2 στο Β προς τα αριστερά και μια F_3 στο σώμα Γ, προς τα δεξιά. Το αποτέλεσμα της δράσης αυτών των δυνάμεων, είναι το Β σώμα να επιβραδύνεται και το Γ να επιταχύνεται. Για όσο χρονικό διάστημα $\upsilon_B > \upsilon_\Gamma$, η απόσταση των δύο σωμάτων μειώνεται και το ελατήριο συσπειρώνεται. Μόλις όμως $\upsilon_B < \upsilon_\Gamma$ η απόσταση των δύο σωμάτων θα αρχίσει να αυξάνεται ξανά, οπότε θα μειώνεται η συσπείρωση του ελατηρίου. Συνεπώς η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, θα είναι τη στιγμή που τα δυο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες. Αλλά τότε, αυτή τη στιγμή, θα έχουμε και τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.



Το σύστημα σώματα Β – Γ- ελατήριο είναι μονωμένο, αφού οι δυνάμεις F_2 και F_3 είναι εσωτερικές για το σύστημα (η συνισταμένη βάρους και κάθετης αντίδρασης του επιπέδου για κάθε σώμα είναι μηδενική), οπότε η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή. Εφαρμόζουμε λοιπόν την Α.Δ.Ο. για τις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου και παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$m_B\upsilon = m_B\upsilon_1 + m_\Gamma\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon}{2}$$

Αλλά και η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή, αφού οι δυνάμεις του ελατηρίου είναι συντηρητικές, συνεπώς εφαρμόζοντας την Διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ των ίδιων θέσεων παίρνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 = \frac{1}{2}2m\upsilon_1^2 + U_{\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}2m\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}K_A$$

Η πρόταση λοιπόν είναι λανθασμένη αφού βλέπουμε ότι το 50% της αρχικής κινητικής ενέργειας στη θέση αυτή έχει μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

iii) Το σώμα Β θα συνεχίσει να επιβραδύνεται για όσο χρονικό διάστημα το ελατήριο θα είναι συσπειρωμένο. Κάποια στιγμή όμως το ελατήριο θα αποκτήσει ξανά το φυσικό μήκος του (και θα επακολουθήσει επιμήκυνσή του). Εφαρμόζουμε ξανά την Α.Δ.Ο. ανάμεσα στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό του μήκος και παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$m_B\upsilon = m_B\upsilon_1' + m_\Gamma\upsilon_2' \quad (1)$$

Από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας εξάλλου παίρνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_B\upsilon^2 = \frac{1}{2}m_B\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_\Gamma\upsilon_2'^2 \quad (2)$$

Αν προσέξουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι είναι το ίδιο με την περίπτωση της μετωπικής ελαστικής κρούσης μεταξύ δύο σωμάτων, που το ένα είναι αρχικά ακίνητο. Έτσι οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_B - m_\Gamma}{m_B + m_\Gamma}\upsilon_1 = \frac{m-m}{m+m}\upsilon = 0 \text{ και } \upsilon_2' = \frac{2m_B}{m_B + m_\Gamma}\upsilon_1 = \frac{2m}{m+m}\upsilon = \upsilon$$

Αφού όμως τη στιγμή αυτή το σώμα Γ έχει αποκτήσει ταχύτητα υ, θα έχει και κινητική ενέργεια:

$$K_\Gamma = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = K_A$$

Θα έχει δηλαδή αποκτήσει το 100% της αρχικής κινητικής ενέργειας του Α σώματος, άρα η πρόταση είναι σωστή.

Σχόλιο:

1) Τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου, έχουμε και τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελα-

τηρίου. Μπορούμε να δούμε ότι τη στιγμή αυτή η «κοινή» ταχύτητα των δύο σωμάτων, είναι αυτή που θα αποκτούσαν τα σώματα Β και Γ, αν μεταξύ τους πραγματοποιείτο μια πλαστική κρούση και τότε θα είχαμε «απώλεια μηχανικής ενέργειας» ίση με το 50% της αρχικής κινητικής ενέργειας του Β σώματος.

2) Στην απάντηση του iii) ερωτήματος είδαμε ότι η κατάσταση που το σώμα «πέφτει» στο ελατήριο μέχρι τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό του μήκος, προσομοιάζει την ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων.

Θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί την συσπείρωση του ελατηρίου, σαν μια πλαστική κρούση, ενώ αντίθετα η αποσυσπείρωση σαν μια «αντίστροφη πλαστική κρούση» που εκτυλίσσεται κατά την αντίθετη κατεύθυνση, μετατρέποντας δηλαδή τη δυναμική ενέργειας σε κινητική, οδηγώντας τελικά σε μια διατήρηση της κινητικής ενέργειας και συνεπώς στην ελαστική κρούση.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης