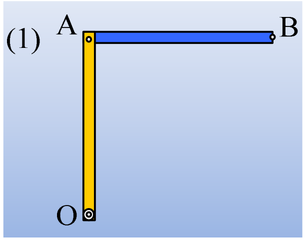
Μια ορθή γωνία στρέφεται.



Διαθέτουμε δύο όμοιες ομογενείς ράβδους με μήκος ℓ=1m και μάζα M=3kg η καθεμιά. Τις καρφώνουμε ενώνοντας το ένα τους άκρο Α σχηματίζοντας γωνία 90°, δημιουργώντας ένα στερεό Σ, το οποίο μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο Ο της ράβδου ΟΑ, όπως στο σχήμα, χωρίς τριβές. Φέρνουμε το στερεό Σ σε τέτοια θέση, ώστε η ράβδος ΑΒ να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.

i) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του στερεού Σ καθώς και η αρχική επιτάχυνση του άκρου Β της ράβδου ΑΒ.

ii) Για την θέση (2) που η ράβδος ΑΒ γίνεται ξανά οριζόντια, να υπολογιστούν:

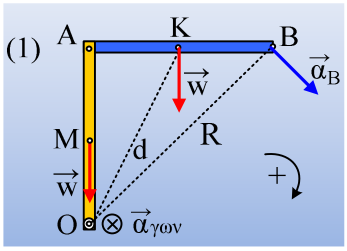
α) η ταχύτητα του άκρου Β και ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του.

β) η στροφορμή του στερεού Σ και η στροφορμή κάθε ράβδου, ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής του στερεού Σ και οι αντίστοιχοι ρυθμοί για κάθε ράβδο.

δ) Η ροπή που ασκείται στην ράβδο ΑΒ από την ράβδο ΟΑ ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο.

Απάντηση:



i) Η ροπή αδράνειας του στερεού Σ ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το Ο είναι:

$$I_O = I_{OA} + I_{AB} = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(OK)^2\right)$$

Αλλά $(OK)^2 = (OA)^2 + (AK)^2 = \ell^2 + \frac{\ell^2}{4} = \frac{5}{4}\ell^2$ οπότε:

$$I_O = \left(\frac{1}{3}M\ell^2\right) + \left(\frac{16}{12}M\ell^2\right) = \frac{1}{3}3\cdot 1^2 kg\cdot m^2 + \frac{4}{3}3\cdot 1^2 kg\cdot m^2 = (1+4) = 5kg\cdot m^2$$

Όπου $I_{OA} = 1kg\cdot m^2$ και $I_{AB} = 4kg\cdot m^2$ οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας των δύο ράβδων.

Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση του στερεού παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_O = I_O\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w\cdot\frac{\ell}{2} = I_O\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{Mg\ell}{2I_O} = \frac{3\cdot 10\cdot 1}{2\cdot 5}rad/s^2 = 3rad/s^2.$$

Αλλά τότε το σημείο Β έχει επιτρόχια επιτάχυνση:

$$\alpha_B = a_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = a_{\gamma\omega\nu}R = a_{\gamma\omega\nu}\ell\sqrt{2} = 3\cdot 1\sqrt{2}m/s^2 = 3\sqrt{2}m/s^2$$

κάθετη στην ακτίνα περιστροφής R=(OB). Το σημείο εξάλλου B δεν έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, αφού η γωνιακή του ταχύτητα είναι μηδενική.

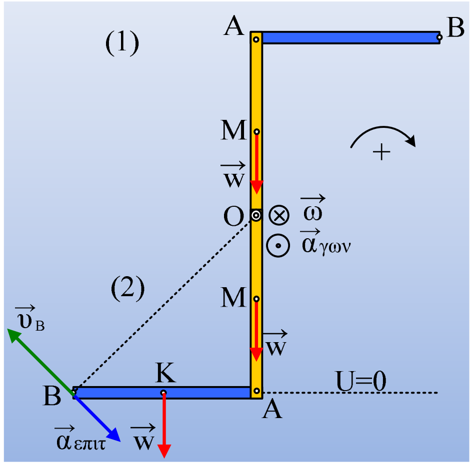
ii) Η μηχανική ενέργεια κατά την κίνηση του στερεού Σ από την θέση (1) στην θέση (2) παραμένει σταθερή:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$M_2 g 2\ell + M_1 g \frac{3\ell}{2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + M_1 g \frac{\ell}{2}$$

$$3Mg\ell = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6Mg\ell}{I_O}} = \sqrt{\frac{6\cdot 3\cdot 10\cdot 1}{5}} rad/s = 6 rad/s$$



α) Έτσι η ταχύτητα του άκρου B είναι $υ_B=ω\cdot R=6\sqrt{2}m/s$ κάθετη στην OB.

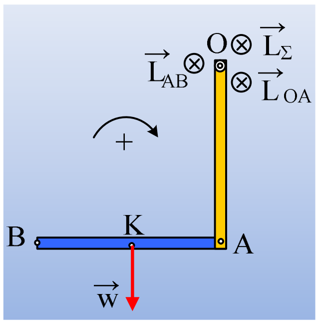
Εξάλλου στη θέση αυτή ο 2ου νόμος του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση του στερεού δίνει:

$$Στ_O=I_O\cdot α_{γων} \rightarrow -w\cdot\frac{\ell}{2} = I_O\cdot a_{γων} \rightarrow a_{γων} = -\frac{Mg\ell}{2I_O} = -\frac{3\cdot 10\cdot 1}{2\cdot 5} rad/s^2 = -3 rad/s^2.$$

Αλλά τότε το σημείο B έχει επιτρόχια επιτάχυνση μέτρου:

$$a_{επ} = a_{γων} R = a_{γων}\ell\sqrt{2} = 3\cdot 1\sqrt{2} m/s^2 = 3\sqrt{2} m/s^2$$

Αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητας του άκρου B μειώνεται.



β) Για το στερεό Σ: $L_Σ=I_O\cdot ω=5\cdot 6\ kg\cdot m^2/s=30\ kg\cdot m^2/s$ με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα μέσα.

Για τη ράβδο OA: $L_{OA}=I_{OA}\cdot ω=1\cdot 6\ kg\cdot m^2/s=6\ kg\cdot m^2/s$ με ίδια κατεύθυνση.

Για τη ράβδο AB: $L_{AB}=I_{AB}\cdot ω=4\cdot 6\ kg\cdot m^2/s=24\ kg\cdot m^2/s$ με ίδια κατεύθυνση.

γ) Για τους ρυθμούς μεταβολής των στροφορμών έχουμε:

Για το στερεό Σ: $\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = -Mg\frac{\ell}{2} = -3\cdot 10\cdot\frac{1}{2} kg\cdot m^2/s^2 = -15 kg\cdot m^2/s^2$ ή

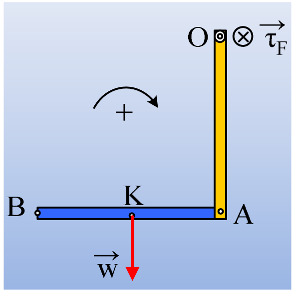
$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I_O a_{γων} = 5\cdot(-3) kg\cdot m^2/s^2 = -15 kg\cdot m^2/s^2$$

Με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα έξω, αντίθετης δηλαδή φοράς από το διάνυσμα της αντίστοιχης στροφορμής, η οποία φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Για τη ράβδο ΟΑ: $\dfrac{dL_{OA}}{dt} = \Sigma\tau = I_{OA} a_{\gamma\omega\nu} = 1\cdot(-3) kg\cdot m^2/s^2 = -3 kg\cdot m^2/s^2$ με ίδια κατεύθυνση.

Για τη ράβδο ΑΒ: $\dfrac{dL_{AB}}{dt} = \Sigma\tau = I_{AB} a_{\gamma\omega\nu} = 4\cdot(-3) kg\cdot m^2/s^2 = -12 kg\cdot m^2/s^2$ ίδιας κατεύθυνσης.

δ) Για τη ράβδο ΑΒ ισχύει:



$$\frac{dL_{AB}}{dt} = \Sigma\tau_O = -w\cdot\frac{\ell}{2} + \tau_{(OA)} \rightarrow$$

$$\tau_{(OA)} = \frac{dL_{AB}}{dt} + Mg\cdot\frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$\tau_{(OA)} = \left(-12 + 3\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\right) Nm = +3 Nm$$

συνεπώς η ράβδος ΑΒ, δέχεται στο άκρο πρόσδεσης Α μια ροπή, το διάνυσμα της οποίας έχει την κατεύθυνση του άξονα και φορά προς τα μέσα.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης