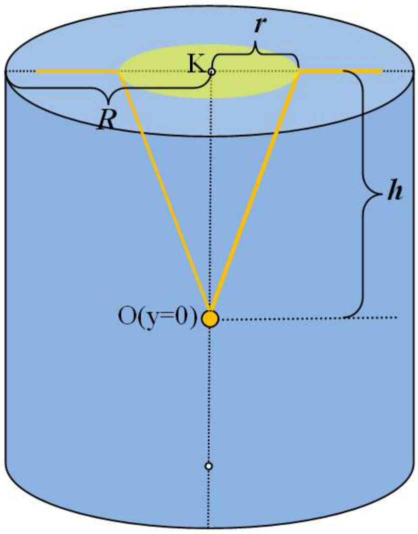
Ταλάντωση και Ολική ανάκλαση



Ένα κυλινδρικό δοχείο ακτίνας **R**=$\sqrt{3}\,m$ περιέχει νερό ενώ σε σημείο O που βρίσκεται στην κατακόρυφη διεύθυνση που διέρχεται από το κέντρο της επιφάνειας του υγρού, σε βάθος **h** από την ελεύθερη επιφάνεια, βρίσκεται σημειακή φωτεινή πηγή, η οποία στέλνει κωνική δέσμη ακτίνων προς την επιφάνεια του υγρού. Η ακτίνα του φωτεινού δίσκου στην επιφάνεια του υγρού είναι $r=\frac{4\sqrt{3}}{5}\,m$ και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας μέσα στο νερό έχει εξίσωση:

$$E(y,t)=1200\sqrt{3}\eta\mu\left(90\pi\cdot 10^{13}t-20\pi\sqrt{3}\cdot 10^{5}y\right)(S.I.)$$

α) Να υπολογιστούν:

α$_1$) Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο νερό.

α$_2$) Ο δείκτης διάθλασης του νερού για την δεδομένη ακτινοβολία.

α$_3$) Η κρίσιμη γωνία εξόδου της ακτινοβολίας από νερό προς τον αέρα.

β) Να γραφεί η χρονική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας στο νερό, θεωρώντας ότι τα δύο πεδία είναι συμφασικά.

γ) Να υπολογιστεί το ύψος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού που βρίσκεται η φωτεινή πηγή.

δ) Κάποια στιγμή που θεωρείται ως t=0 η φωτεινή πηγή αρχίζει να κινείται από το σημείο O(y=0) κατακόρυφα προς τα πάνω σε διεύθυνση που διέρχεται από το κέντρο K της επιφάνειας του υγρού εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου T=1,5 s. Εάν κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης φωτίζεται στιγμιαία ολόκληρη η επιφάνεια του υγρού, να υπολογίσετε:

δ$_1$) το πλάτος A και η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης της φωτεινής πηγής, θεωρώντας ως θετική την φορά προς τα κάτω

δ$_2$) για πόσο χρόνο στη διάρκεια κάθε περιόδου το εμβαδόν του φωτεινού δίσκου είναι μεγαλύτερο από το 81% του εμβαδού της επιφάνειας του υγρού.

Για τον αέρα θεωρείστε δείκτη διάθλασης $\eta_{αερ}=1$ και ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο κενό $c=3\cdot 10^{8}$ m/s.

Λύση:

α$_1$) Συγκρίνοντας της δοθείσα εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου με την αντίστοιχη της θεωρίας $E=E_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y}{\lambda}\right)$ προκύπτει ότι:

$$E_{max}=1200\sqrt{3}\ \text{N/C}$$

$$\omega=90\pi\cdot 10^{13}\,\text{rad/s}\Rightarrow f=45\cdot 10^{13}\,\text{Hz}$$

$$\frac{2\pi \cdot y}{\lambda} = 20\pi\sqrt{3} \cdot 10^5 y \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{30} \cdot 10^{-5}\,\text{m}$$

Οπότε η ταχύτητα διάδοσης στο νερό είναι:

$$u = \lambda \cdot f \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{30} \cdot 10^{-5} \cdot 45 \cdot 10^{13} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{u = 1,5\sqrt{3} \cdot 10^8 m/s}}$$

α₂) Ο δείκτης διάθλασης του νερού για την συγκεκριμένη ακτινοβολία είναι

$$n = \frac{c}{u} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5\sqrt{3} \cdot 10^8} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{n = \frac{2}{\sqrt{3}}}}$$

α₃) Η κρίσιμη γωνία εξόδου είναι

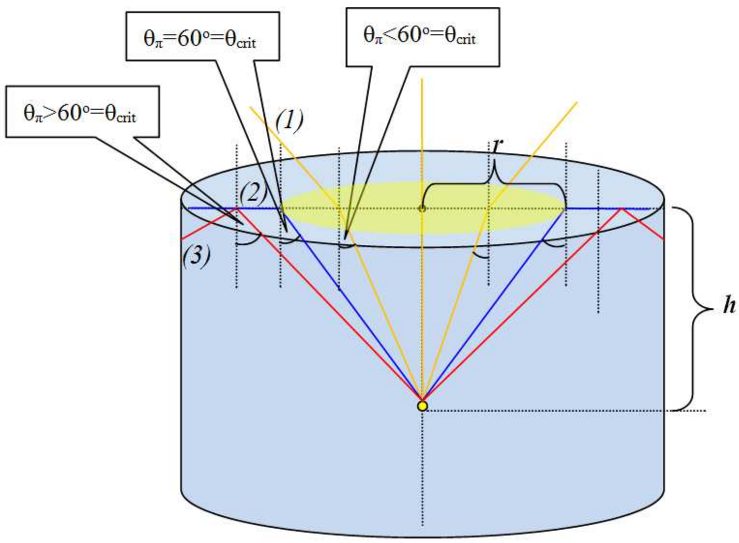
$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_{\alpha\varepsilon\rho}}{n_{\nu\varepsilon\rho}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\theta_{crit} = 60^o}}$$

β) Για την ένταση του μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας έχουμε:

$$B = B_{max}\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Όπου $\frac{E_{max}}{B_{max}} = u \Rightarrow B_{max} = \frac{E_{max}}{u} = \frac{1200\sqrt{3}}{1{,}5\sqrt{3}} \Rightarrow B_{max} = 800\text{T}$. Άρα:

$$\boxed{\mathbf{B = 800 \cdot \eta\mu\left(90\pi \cdot 10^{13}t - 20\pi\sqrt{3} \cdot 10y\right)(S.I.)}}$$



γ) Μία ακτίνα, όπως η (1) η οποία προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-αέρα υπό γωνία μικρότερη από 60^o, διαθλάται και συνεχίζει την διάδοσή της στον αέρα. Μία ακτίνα, όπως η (2) η οποία προσπίπτει υπό γωνία 60^o, κινείται παράλληλα στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Οι ακτίνες οι οποίες προσπίπτουν υπό γωνία μεγαλύτερη από 60^o, όπως η (3), δεν διαθλώνται, αλλά παθαίνουν ολική εσωτερική ανάκλαση. Έτσι, οι ακτίνες που πέφτουν στη διαχωριστική επιφάνεια υπό γωνία 60^o καθορίζουν την περίμετρο του φωτεινού δίσκου ακτίνας r που σχηματίζεται στην επιφάνεια του υγρού.

Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα:

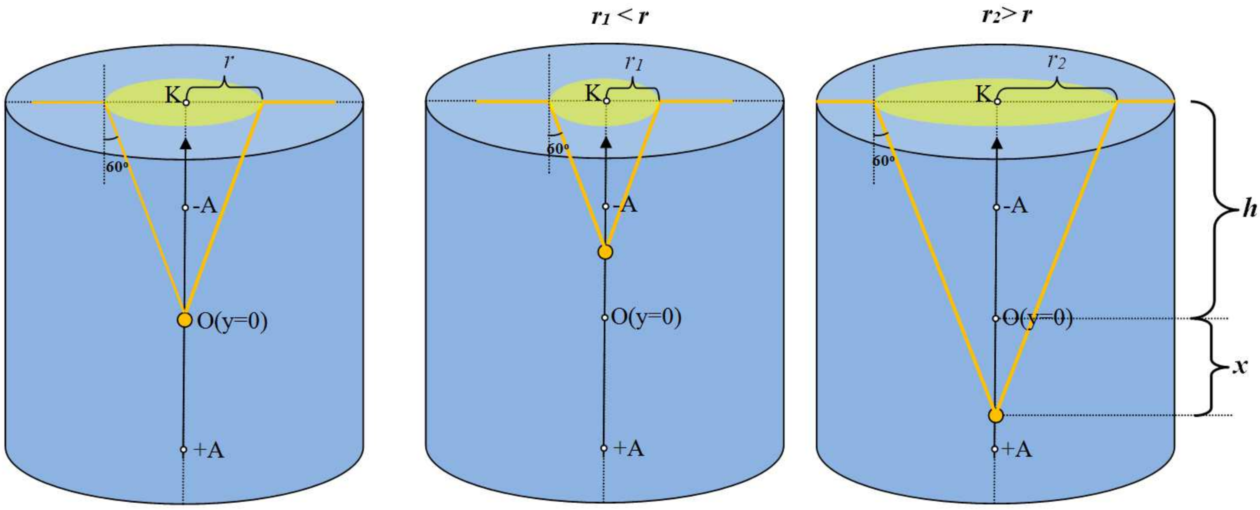
$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{r}{d} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{r^2}{r^2+h^2} \Rightarrow$$

$$4r^2 = 3r^2 + 3h^2 \Rightarrow h = \frac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{h = 0,8m}}$$

δ$_1$) Όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα όρια του φωτεινού δίσκου που σχηματίζεται στην επιφάνεια του υγρού καθορίζεται από εκείνες τις ακτίνες που φτάνουν στην διαχωριστική επιφάνεια νερού-υγρού υπό γωνία ίση με την κρίσιμη. Όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα, εάν η φωτεινή πηγή αρχίζει να κινείται προς κατακόρυφα προς τα πάνω, πλησιάζοντας την πάνω ακραία θέση ταλάντωσής της, μειώνεται η απόσταση από το σημείο Κ των φωτεινών ακτίνων που φτάνουν στην επιφάνεια υπό γωνία 60^o, με αποτέλεσμα να μειώνεται η ακτίνα του φωτεινού δίσκου(r_1<r).

Ενώ, όταν η φωτεινή πηγή κινείται προς κατακόρυφα προς τα κάτω, κινούμενη προς την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής της, αυξάνεται η απόσταση από το σημείο Κ των φωτεινών ακτίνων που φτάνουν στην επιφάνεια υπό γωνία 60^o, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ακτίνα του φωτεινού δίσκου. Επομένως, η μόνη περίπτωση να φωτιστεί στιγμιαία ολόκληρη η επιφάνεια του υγρού, είναι να βρεθεί η φωτεινή πηγή στην κάτω ακραία θέση ταλάντωσης(r_2>r).

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{R}{d'} = \frac{R}{\sqrt{R+h'^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{\sqrt{R^2+h'^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{R^2}{R^2+h'^2} \Rightarrow h' = 1m$$



Όμως:

$$h' = h + A \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 0,2m}}$$

Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης της πηγής είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{3}\ rad/s$$

Την t=0 η πηγή βρίσκεται διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα πάνω, δηλαδή με u<0, οπότε η ταλάντωσή της έχει αρχική φάση $\varphi_o = \pi$ rad. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 0,2\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}t + \pi\right)(S.I.)}}$$

δ2) Θέλουμε:

$$E_{\varphi\omega\tau.\delta\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon} > \frac{81}{100}E_{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma\ \upsilon\gamma\rho o\acute{\upsilon}} \Rightarrow \pi r_2^2 > \frac{81}{100}\pi R^2 \Rightarrow r_2^2 > \frac{81}{100}R^2$$

Όταν η φωτεινή πηγή διέρχεται από την θέση ισορροπίας της(σημείο Ο), η ακτίνα του φωτεινού δίσκου στην επιφάνεια του υγρού είναι $r = \frac{4\sqrt{3}}{5}m \approx 1{,}39m$, ενώ όταν βρίσκεται σε θέσεις του άξονα ταλάντωσης πάνω από αυτήν, η ακτίνα του φωτεινού δίσκου θα είναι μικρότερη($r_1<r$).

Επομένως, η απαίτηση $r_2>0{,}9R$ θα πληρείται για κάποιες θέσεις του άξονα ταλάντωσης που βρίσκονται κάτω από την θέση ισορροπίας Ο.

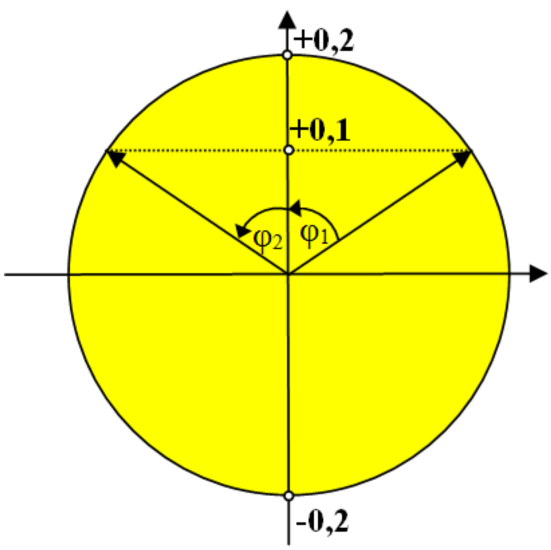
Για μία θέση της φωτεινής πηγής με απομάκρυνση x από την Θ.Ι. έχουμε:

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{r_2}{d'} = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + h'^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + h'^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{r_2^2}{r_2^2 + h'^2} \Rightarrow r_2^2 = 3h'^2$$

Άρα:

$$3h'^2 > \frac{81}{100}R^2 \Rightarrow (h+x)^2 > \frac{27}{100}R^2 \Rightarrow h + x > 0{,}3\sqrt{3}R \Rightarrow h + x > 0{,}9 \Rightarrow x > 0{,}1m$$

Αυτό σημαίνει ότι για το χρονικό διάστημα που το σώμα κινείται από την θέση x=+0,1m μέχρι την κάτω ακραία θέση ταλάντωσής του (x=+0,2m) και στην συνέχεια μέχρι να βρεθεί πάλι ανερχόμενο στην x=+0,1m, το εμβαδόν του φωτεινού δίσκου στην επιφάνεια του υγρού είναι μεγαλύτερο από το 81% της επιφάνειας του υγρού. Με την βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος έχουμε:



$$\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}\text{rad}$$

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{3}\,\text{rad} \quad \text{οπότε} \quad \varphi_{ολ}=\varphi_1+\varphi_2=\frac{2\pi}{3}\,\text{rad}$$

Άρα:

$$\Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{T}}=\frac{T}{3}=\frac{1{,}5}{3}\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\Delta t=0,5s}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος