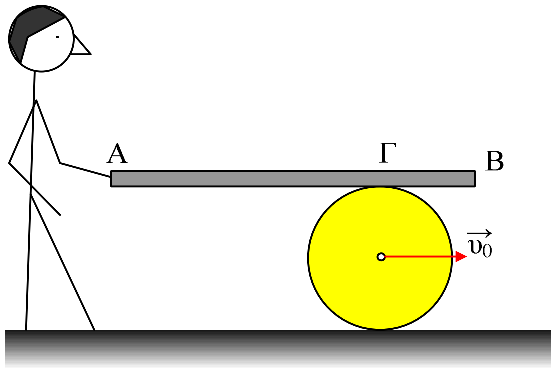
Το φρενάρισμα του κυλίνδρου.



Σε οριζόντιο επίπεδο κυλίεται (χωρίς ολίσθηση) ένας βαρύς κύλινδρος μάζας Μ=200kg και ακτίνας R=0,4m με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{0cm}=4m/s. Προκειμένου να ακινητοποιήσουμε τον κύλινδρο, τοποθετούμε πάνω του μια δοκό μήκους 4m και μάζας m=30kg, συγκρατώντας την με το χέρι μας στο ένα της άκρο Α, φροντίζοντας να είναι διαρκώς σε οριζόντια θέση και να στηρίζεται στον κύλινδρο σε απόσταση (ΓΒ)= d=1m από το άλλο της άκρο Β, όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ δοκού και κυλίνδρου είναι μ=0,3, ενώ ο κύλινδρος επιβραδύνεται χωρίς να ολισθαίνει, μέχρι τη θέση που ακινητοποιείται.

i) Να υπολογιστεί η κάθετη δύναμη στήριξης καθώς και η τριβή ολίσθησης που ασκείται στη δοκό στο σημείο Γ από τον κύλινδρο.

ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση (επιβράδυνση) του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

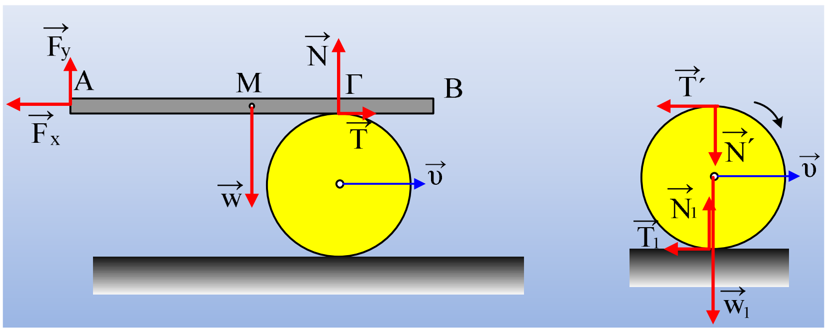
iii) Να υπολογιστεί η στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από το έδαφος κατά τη διάρκεια της επιβράδυνσης.

iv) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του (μέτρο και κατεύθυνση).

v) Να υπολογιστούν η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που ασκούμε στο άκρο Α της ράβδου, στη διάρκεια της παραπάνω επιβράδυνσης του κυλίνδρου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του I_{cm}= ½ MR^2 και και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο αριστερό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό και στο δεξιό, στον κύλινδρο (σχεδιασμένες με διαφορετική κλίμακα για να έχουμε πιο ευκρινή σχήματα).

Η δοκός, για να στηρίζεται διαρκώς στο σημείο Γ στον κύλινδρο, προφανώς θα πρέπει να μετακινείται οριζόντια έχοντας κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα με τον άξονα του κυλίνδρου. Αλλά αυτό σημαίνει ότι θα έχει και την ίδια επιτάχυνση με τον άξονα. Άρα δεν ισορροπεί και δεν έχουμε δικαίωμα να πάρουμε ότι Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Όμως δεν περιστρέφεται, εκτελώντας μεταφορική κίνηση συνεπώς ως προς το κέντρο μάζας της Μ, θα ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(M)}=0 \rightarrow N\cdot(M\Gamma)-F_y\cdot(AM)=0 \rightarrow N=2F_y \ (1)$$

Εξάλλου στην κατακόρυφη διεύθυνση δεν επιταχύνεται συνεπώς $\Sigma F_y=0 \rightarrow N+F_y=mg=300N$ (2)

Από (1) και (2) βρίσκουμε $F_y=100N$ και $N=200N$.

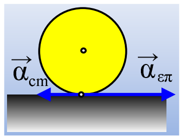
Έτσι για την τριβή ολίσθησης που θα ασκηθεί πάνω της έχουμε:

$$T=\mu\cdot N=0{,}3\cdot 200N=60N.$$

ii) Ερχόμαστε τώρα στην κίνηση του κυλίνδρου. Ένα ερώτημα που ανακύπτει είναι ποια η κατεύθυνσης της στατικής τριβής; Έχει επικρατήσει η λογική να σχεδιάζεται τυχαία και να επιλύεται το σύστημα ώστε να την υπολογίσουμε και αναλόγως του προσήμου της, καταλήγουμε στην φορά της. Θα μπορούσαμε όμως να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα «περισσότερο θετικά». Τι θα συνέβαινε αν δεν υπήρχε η τριβή; Ο κύλινδρος επιβραδύνεται αποκτώντας επιτάχυνση (δουλεύουμε με μέτρα) $\Sigma F_x=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$

$$a_{cm}=\frac{T'}{M}=\frac{60}{200}m/s^2=0{,}3m/s^2$$

Εξάλλου από το 2ο νόμο για την στροφική κίνηση θα είχαμε:



$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'\cdot R=½\,MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\varepsilon\pi}=a_{\gamma\omega\nu}R=\frac{2T'}{M}=0{,}6m/s^2$$

Δηλαδή το κατώτερο σημείο του κυλίνδρου θα είχε επιτάχυνση προς τα δεξιά και αφού τείνει να κινηθεί προς τα δεξιά, αν το επίπεδο δεν είναι λείο, θα ασκηθεί τριβή με φορά προς τ' αριστερά, όπως στο πρώτο σχήμα μας.

Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση και παίρνοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τις επιμέρους κινήσεις έχουμε (δουλεύουμε με τα μέτρα των μεγεθών):

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow T'+T_1=M\cdot\alpha_{cm}$ (3)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'\cdot R-T_1\cdot R=½\,MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'-T_1=½\,MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (4)

Αλλά αφού ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα έχουμε και $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4) παίρνουμε

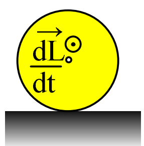
$$2T'=\frac{3}{2}Ma_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{4T'}{3M}=\frac{4\cdot 60}{3\cdot 200}m/s^2=0{,}4m/s^2$$

Η επιτάχυνση αυτή έχει φορά προς τα αριστερά, συνεπώς ο κύλινδρος επιβραδύνεται.

iii) Από την σχέση (3) παίρνουμε:

$$T_1=M\cdot\alpha_{cm}-T'=200\cdot 0{,}4N-60N=20N.$$

iv) Ο ρυθμός μεταβολή της στροφορμής είναι ίσος:



$$\frac{dL}{dt}=\sum\tau=T'R-T_1R=60\cdot 0{,}4kg\cdot m^2/s^2-20\cdot 0{,}4kg\cdot m^2/s^2=16kg\cdot m^2/s^2$$

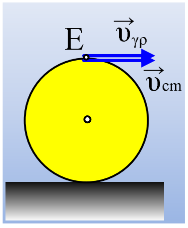
Με διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά όπως στο διπλανό σχήμα.

v) Η δοκός εκτελεί κίνηση όμοια με τον άξονα του κυλίνδρου, δηλαδή με επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά και μέτρο α=0,4m/s^2, οπότε από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \rightarrow F_x - T = m\alpha \rightarrow$$

$$F_x = T + m\alpha = 60N + 30\cdot 0{,}4N = 72N$$

Σχόλιο:



Αξίζει να σημειωθεί ότι το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου Ε, το οποίο έρχεται σε επαφή με την δοκό, έχει διπλάσια ταχύτητα από την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Πράγματι: $\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega\cdot R = 2\,\upsilon_{cm}$

Αλλά τότε έχει και διπλάσια ταχύτητα από το σημείο επαφής με τη δοκό (σημείο Γ) και η τριβή, είναι τριβή ολίσθησης. Εξάλλου, η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο η Τ΄, έχει φορά προς τα αριστερά, αφού έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα (ως προς τη δοκό) του σημείου επαφής Ε, συνεπώς η αντίδρασή της, η τριβή Τ που ασκείται στη δοκό, έχει φορά προς τα δεξιά.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης