

Φθίνουσα και εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Ένα σώμα μάζας 2kg δένεται από το ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς 200N/m το πάνω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Μετακινούμε το σώμα προς τα πάνω και το φέρνουμε στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε το σώμα ελεύθερο από την θέση αυτή και εκτελεί ταλάντωση. Πάνω στο σώμα εκτός από την δύναμη επαναφοράς ασκείται και εξωτερική δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$, όπου b η σταθερά απόσβεσης και v η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος. Παρατηρούμε ότι μετά από 2s το πλάτος της ταλάντωσης έχει υποτετραπλασιαστεί. Να βρείτε:

- i) την ενέργεια που προσφέρθηκε αρχικά στο σύστημα για να εκτελέσει ταλάντωση και την αρχική επιτάχυνση του σώματος.
- ii) την σταθερά Λ της ταλάντωσης και το έργο της δύναμης αντίστασης από την $t = 0$ ως την 2s.
- iii) την απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας συναρτήσει του χρόνου.

Μετά την 2s εξαναγκάζουμε το σύστημα σε αμείωτη ταλάντωση, οπότε ασκούμε μια κατάλληλη εξωτερική περιοδική δύναμη.

- iv) Ποια πρέπει να είναι η τιμή της συχνότητας της εξωτερικής δύναμης ώστε το σύστημα να ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος αυτό που είχε τη στιγμή $t=2s$;
- v) Ποιος είναι ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας της εξωτερικής δύναμης όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του;

Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$, $\ln 2=0,7$ και ότι η σταθερά απόσβεσης είναι αρκετά μικρή ώστε να θεωρήσουμε την περίοδο ίση με την περίοδο της αμείωτης ταλάντωσης του σώματος.

Απάντηση:

- i) Η ενέργεια που προσφέρθηκε αρχικά στο σύστημα $E_T = \frac{1}{2}DA^2$ είναι

η ολική ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος. όπου το πλάτος A είναι η αρχική εκτροπή από την $\Theta.I.$ και $D=k$.

Από το σχήμα φαίνεται ότι $A = \Delta l$ και Δl η επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση φυσικού του μήκους.

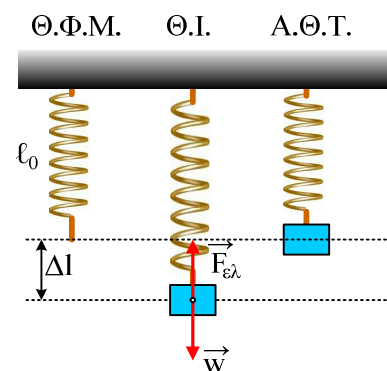
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_{ελ.} - mg = 0 \Leftrightarrow k\Delta l = mg \Leftrightarrow$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta l = \frac{mg}{k} \Leftrightarrow \Delta l = 0,1m$$

$$\text{Άρα: } E_T = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = 1J$$

Στην πάνω ακραία θέση, το σώμα, αμέσως μόλις αφηθεί ελεύθερο να κινηθεί, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος. Το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, ενώ η δύναμη απόσβεσης είναι μηδενική αφού $v=0$. Συνεπώς: $\Sigma F = m \cdot a \rightarrow mg = m \cdot a$ ή $a_0 = g = 10 \text{ m/s}^2$.

Επειδή στο σώμα εκτός από την δύναμη επαναφοράς ασκείται και δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$ η ταλάντωση είναι φθίνουσα και το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, δηλαδή ισχύει η σχέση:



$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$, $t \in R^+$ με $A_0=0,1m$. Άρα έχουμε :

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot 2} \Leftrightarrow \Lambda \cdot 2 = \ln 4 \Leftrightarrow \Lambda = \frac{2 \ln 2}{2} \Leftrightarrow \Lambda = \ln 2 = 0,7s^{-1}$$

Το έργο της δύναμης αντίστασης είναι αριθμητικά ίσο με την ενέργεια που χάθηκε από 0 ως 2s, δηλαδή ισχύει :

$$W_{F_{avt.}} = E_{(t=2s)} - E_{(t=0)} = \frac{1}{2} D A_2 - \frac{1}{2} D A_0 = \frac{1}{2} k \left(\frac{A_0}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} k A_0^2 \Leftrightarrow$$

$$W_{F_{avt.}} = \frac{1}{2} k \frac{A_0^2}{16} - \frac{1}{2} k A_0^2 = \frac{E_0}{16} - E_0 = -\frac{15}{16} E_0 = -0,9375J$$

ii) Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας θα είναι της μορφής :

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

Με $A_0=0,1m$, $\Lambda=0,7s^{-1}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10rad/s$ ενώ και $\phi_0 = \frac{\pi}{2} rad$ επειδή την $t=0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση $+A$ επομένως καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$x = 0,1 \cdot e^{-0,7t} \eta\mu(10t + \pi/2) = 0,1 \cdot e^{-0,7t} \sigma\upsilon\nu 10t \quad (S.I.)$$

iii) Στη συνέχεια ασκώντας μια κατάλληλη εξωτερική περιοδική δύναμη η ταλάντωση γίνεται εξαναγκασμένη και το πλάτος της ταλάντωσης, μετά την χρονική στιγμή 2s, παραμένει σταθερό.

Για να ταλαντώνεται το σύστημα με μέγιστο πλάτος πρέπει η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης (διεγέρτης) να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, και το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Δηλαδή να ισχύει :

$$f_{\Delta} = f_0 \Leftrightarrow f_{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} Hz$$

και το σύστημα ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος $A_{\max} = \frac{A_0}{4} = 0,025m$.

iv) Ο ρυθμός με τον οποίο ο διεγέρτης προσφέρει ενέργεια στο σύστημα μετά τη χρονική στιγμή 2s είναι :

$$\frac{dW_{F_{εξ.}}}{dt} = \frac{F_{εξ.} \cdot dx}{dt} = F_{εξ.} \cdot v$$

Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού ($f_{\Delta} = f_0$ ή $\omega_{\Delta} = \omega_0 = 10rad/s$) θα έχουμε :

$$F_{εξ.} = -F_{avt.} = bv \quad \text{με} \quad \Lambda = \frac{b}{2m} \quad \text{ή} \quad b = \Lambda \cdot 2m = 2,8 \text{ kg/s.}$$

Οπότε από την προηγούμενη σχέση θα ισχύει :

$$\frac{dW_{F_{εξ.}}}{dt} = F_{εξ.} \cdot v = (bv) \cdot v = bv^2$$

Επειδή το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του θα είναι $v = v_{\max} = \omega \cdot A_{\max} = \omega \cdot \frac{A_0}{4}$ και τελικά:

$$\frac{dW_{F_{εξ.}}}{dt} = b v_{\max}^2 = 0.175 J / s$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Στελίου Κωνσταντίνος