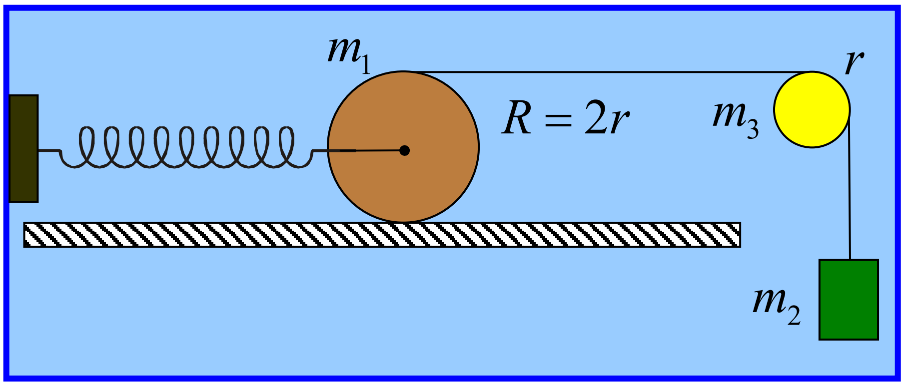
Μια δύσκολη ταλάντωση..... και όχι μόνο!



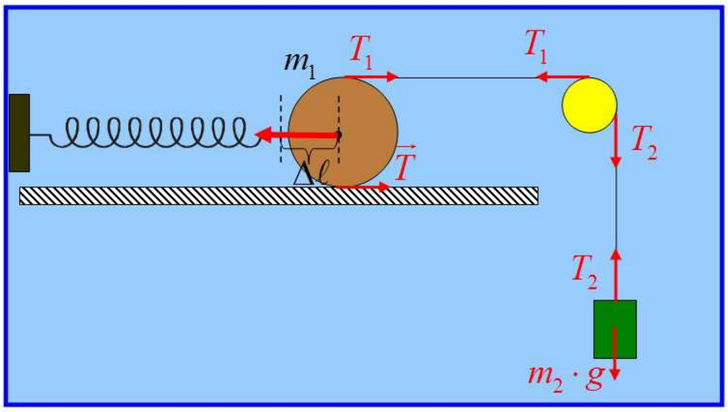
Δείξατε ότι ο κύλινδρος του σχήματος εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

Υπολογίσατε το πλάτος και την περίοδο. Ουδέν σώμα του προβλήματος ολισθαίνει επί ουδενός.

$m_1 = 2kg$, $m_2 = 1kg$, $m_3 = 1,5kg$ $k = 40\dfrac{N}{m}$, $g = 10\dfrac{m}{s^2}$

Λύση:

Στην θέση ισορροπίας του συστήματος έχουμε ότι:



Το πράσινο σώμα ισορροπεί οπότε:

$T_2 = m_2 \cdot g$

Η κίτρινη τροχαλία δεν στρέφεται οπότε:

$\sum \tau = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$

Ο κύλινδρος δεν στρέφεται οπότε:

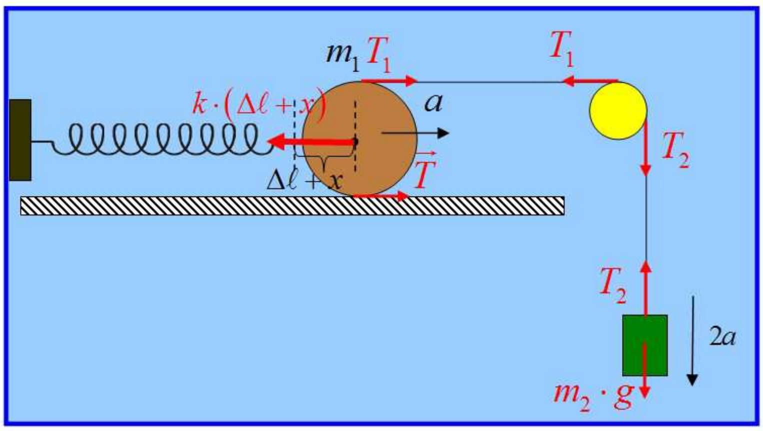
$\sum \tau = 0 \Rightarrow T = T_1$

Προφανώς , επομένως:

$T = m_2 \cdot g = 10N$

Η ισορροπία του κυλίνδρου επιβάλλει: $k \cdot \Delta\ell = T + T_1 \Rightarrow \Delta\ell = 0,5m$

Στην τυχαία x θέση:



Η επιτρόχιος επιτάχυνση της τροχαλίας είναι ίση με την επιτάχυνση του πράσινου σώματος.

Το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου έχει την ίδια επιτάχυνση με την επιτρόχιο επιτάχυνση της τροχαλίας, δηλαδή με αυτήν του πράσινου σώματος.

Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει επομένως επιτάχυνση ίση με τη μισή επιτάχυνση του πράσινου σώματος.

Για τις γωνιακές επιταχύνσεις έχουμε ότι $a_{\gamma,\kappa}=\frac{a}{R}$ και $a_{\gamma,\tau}=\frac{2a}{r}=\frac{4a}{R}$.

Οι εξισώσεις:

$$m_2\cdot g-T_2=2m_2\cdot a \quad (1)$$

$$\left(T_2-T_1\right)\cdot r=\frac{m_3\cdot r^2}{2}\cdot\frac{2a}{r}\Rightarrow T_2-T_1=m_3\cdot a \quad (2)$$

$$\left(T_1-T\right)\cdot R=\frac{m_1\cdot R^2}{2}\cdot\frac{a}{R}\Rightarrow T_1-T=\frac{m_1}{2}\cdot a \quad (3)$$

$$T_1+T-k\cdot\left(\Delta\ell+x\right)=m_1\cdot a\Rightarrow T_1+T-k\cdot\Delta\ell-k\cdot x=m_1\cdot a\Rightarrow T_1+T-2m_2\cdot g-k\cdot x=m_1\cdot a \quad (4)$$

Θέλω να τις προσθέσω και να φύγουν όλες οι άγνωστες τριβές και τάσεις. Τι θα λέγατε για:

$$2m_2\cdot g-2T_2=4m_2\cdot a \quad (5)$$

$$2T_2-2T_1=2m_3\cdot a \quad (6)$$

$$T_1-T=\frac{m_1}{2}\cdot a \quad (7)$$

$$T_1+T-2m_2\cdot g-k\cdot x=m_1\cdot a \quad (8)$$

Προσθέτω και ….. $-k\cdot x=\left(\frac{3m_1}{2}+4m_2+2m_3\right)\cdot a\Rightarrow a=-\frac{k}{\frac{3m_1}{2}+4m_2+2m_3}\cdot x=-C\cdot x$

Όταν η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ανάλογη του x τότε εκτελεί αρμονική ταλάντωση διότι:

$$\sum F=m_1\cdot a=m_1\cdot\left(-C\cdot x\right)=-C\cdot m_1\cdot x$$

Για την ταλάντωση αυτήν $\omega=\sqrt{\frac{D}{m_1}}=\sqrt{\frac{C\cdot m_1}{m_1}}=\sqrt{C}=\sqrt{\frac{k}{\frac{3m_1}{2}+4m_2+2m_3}}=2\frac{rad}{s}$

Η περίοδος είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi s$

Την χρονική στιγμή μηδέν είναι σε ακραία θέση διότι ξεκινάει χωρίς ταχύτητα.

Η θέση ισορροπίας είναι $\Delta\ell=0,5m$ δεξιότερα. Το πλάτος , επομένως, είναι $A=0,5m$.

$$\text{Άρα } x=A\cdot\eta\mu\left(\omega t+\varphi\right)$$

Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά αυτήν προς τα δεξιά τότε την στιγμή μηδέν βρίσκεται στην θέση: $x=-A$

Οπότε:

$$-A=A\cdot\eta\mu\varphi\Rightarrow\eta\mu\varphi=-1\Rightarrow\varphi=\frac{3\pi}{2}$$

Η εξίσωση θέσης είναι επομένως:

$$x = 0,5 \cdot \eta\mu\left(2t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Γιάννης Κυριακόπουλος