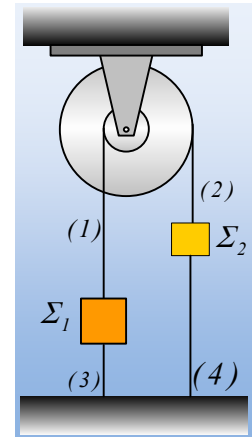


### Δύο σώματα και μια διπλή τροχαλία.

Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα  $M = 2\text{kg}$ , ακτίνα  $R = 0,3\text{m}$ , είναι συμπαγής και ομογενής και φέρει ομόκεντρη κυκλική προεξοχή ακτίνας  $r = 0,1\text{m}$ . Στην περιφέρεια της τροχαλίας και στην κυκλική προεξοχή έχουμε τυλίξει δύο νήματα, (1) και (2), πολλές φορές ώστε να μην ολισθαίνουν και στα άκρα τους έχουμε δέσει δύο σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  με μάζες  $m_1 = 2\text{kg}$  και  $m_2 = 1\text{kg}$  αντίστοιχα. Τα σώματα οποία ισορροπούν δεμένα και με τα κατακόρυφα νήματα (3) και (4) με το έδαφος, όπως στο σχήμα.

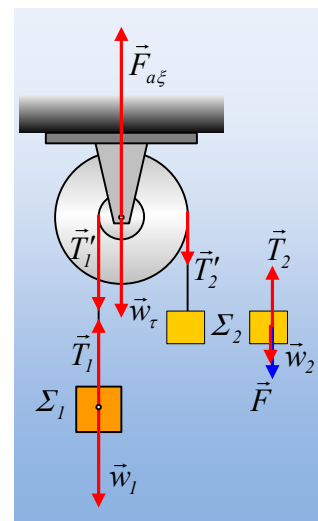


- i) Ποιο νήμα, το (3) ή το (4) μπορούμε να κόψουμε, χωρίς να πάψει να ισορροπεί το σύστημα; Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.
- ii) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος που είναι απαραίτητο για την ισορροπία.
- ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το παραπάνω νήμα. Να υπολογισθεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- iii) Πόσο θα έχει αυξηθεί η δυναμική ενέργεια του  $\Sigma_1$  τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του  $\Sigma_2$  έχει μειωθεί κατά  $3\text{J}$ ;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας  $I = \frac{1}{2} MR^2$  και  $g = 10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Ας θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν τα νήματα (3) και (4) αλλά η εξασφάλιση της ισορροπίας επιτυγχάνεται με την άσκηση μιας κατακόρυφης δύναμης  $F$ . Σε ποιο σώμα; Σε όποιο θέλουμε, αλλά ας προτιμήσουμε σε αυτό που «υποψιαζόμαστε» ότι τείνει να κινηθεί προς πάνω. Ποιο είναι αυτό; Δεν ξέρουμε, αλλά το  $\Sigma_2$  έχει μικρότερη μάζα, οπότε «λογικό» θα ήταν να υποθέσουμε ότι αυτό τείνει να κινηθεί προς τα πάνω. Τότε ασκώντας την κατακόρυφη δύναμη  $F$  στο  $\Sigma_2$  πετυχαίνουμε την ισορροπία του συστήματος. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ασκούμενες στο σύστημα δυνάμεις.



Το  $\Sigma_1$  ισορροπεί:  $\Sigma F = 0 \rightarrow T_1 = w_1 = m_1 g = 20\text{N}$ .

Η τροχαλία ισορροπεί:  $\Sigma \tau = 0 \rightarrow T_2' \cdot R - T_1' \cdot r = 0 \rightarrow T_2' = T_1' \frac{r}{R} = 20 \frac{0,1}{0,3} = 6,7\text{N}$

Το  $\Sigma_2$  ισορροπεί:  $\Sigma F = 0 \rightarrow F + w_2 - T_2 = 0 \rightarrow F = 6,7\text{N} - 10\text{N} = -3,3\text{N}$

Πράγμα που σημαίνει ότι αν θέλουμε να ισορροπεί το σύστημα, πρέπει να ασκήσουμε στο σώμα  $\Sigma_2$  δύναμη προς τα πάνω! Με άλλα λόγια το σώμα  $\Sigma_2$  υποθέσαμε ότι τείνει να κινηθεί προς τα πάνω, ενώ στην πραγματικότητα, τείνει να κινηθεί προς τα κάτω. Έτσι το νήμα (4)

θα μπορούσε και να αφαιρεθεί, χωρίς να αλλάξει κάτι στην ισορροπία του συστήματος, αφού δεν ασκεί καμιά δύναμη (η τάση του είναι μηδενική), αφού ένα νήμα, το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να τραβά και όχι να σπρώχνει.

- ii) Έστω  $T_3$  η τάση του (3) νήματος, μέσω της οποίας εξασφαλίζεται η ισορροπία του συστήματος.

Το σώμα  $\Sigma_2$  ισορροπεί:  $\Sigma F=0 \rightarrow T_2=w_2=m_2g=10N$

Η τροχαλία ισορροπεί:  $\Sigma \tau=0 \rightarrow T_2' \cdot R - T_1' \cdot r = 0 \rightarrow$

$$T_1' = T_2' \frac{R}{r} = 10 \frac{0,3}{0,1} = 30N$$

Το  $\Sigma_1$  ισορροπεί:  $\Sigma F=0 \rightarrow T_3 + w_1 - T_1 = 0 \rightarrow$

$$T_3 = T_1 - m_1g = 30N - 20N = 10N.$$

- iii) Μόλις κόψουμε το νήμα (3), Το σώμα  $\Sigma_1$  θα κινηθεί προς τα πάνω, το  $\Sigma_2$  θα κατέβει, ενώ η τροχαλία θα περιστραφεί δεξιόστροφα. Από το δεύτερο νόμο για κάθε σώμα παίρνουμε:

Σώμα  $\Sigma_1$ :  $\Sigma F = m_1 a_1 \rightarrow T_1 - m_1 g = m_1 \cdot a_1$  (1)

Σώμα  $\Sigma_2$ :  $\Sigma F = m_2 \cdot a_2 \rightarrow m_2 g - T_2 = m_2 \cdot a_2$  (2)

Τροχαλία:  $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_2' R - T_1' r = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$  ή

$$T_2 \cdot R - T_1 \cdot r = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Αλλά η επιτάχυνση του σημείου A, η επιτρόχια επιτάχυνσή του, είναι ίση με την επιτάχυνση  $a_1$  του σώματος  $\Sigma_1$ , όπως η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου B, είναι ίση με την επιτάχυνση  $a_2$ , δηλαδή:

$$a_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r \quad (4) \quad \text{και} \quad a_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (5)$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην (3) παίρνουμε:

$$(m_2 g - m_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R) \cdot R - (m_1 g + m_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r) \cdot r = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

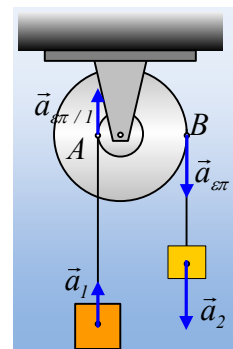
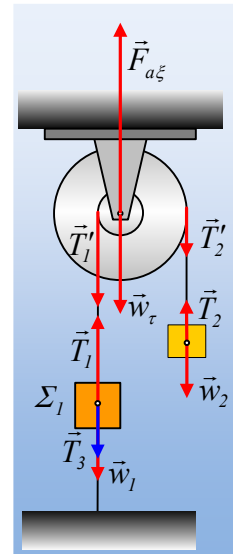
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{m_2 g R - m_1 g r}{\frac{1}{2} MR^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,3 - 2 \cdot 10 \cdot 0,1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,3^2 + 2 \cdot 0,1^2 + 1 \cdot 0,3^2} \text{ rad} / \text{s}^2 = 5 \text{ rad} / \text{s}^2.$$

- iv) Στη θέση που η δυναμική ενέργεια του  $\Sigma_2$  έχει μειωθεί κατά 3J, το σώμα έχει κινηθεί προς

τα κάτω κατά  $y_2$ , όπου  $\Delta U = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} = m_2 g y_2 \rightarrow y_2 = \frac{\Delta U}{m_2 g} = \frac{3}{10} \text{ m} = 0,3 \text{ m}.$

Αλλά αν στον ίδιο χρόνο η τροχαλία έχει περιστραφεί κατά γωνία  $\theta$ , θα αυξηθεί το μήκος του (2) νήματος κατά  $y_2$ , ενώ θα μειωθεί το μήκος του (1) νήματος κατά  $y_1$  και θα ισχύουν:



$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \theta \cdot r \\ y_2 = \theta \cdot R \end{array} \right\} \implies \frac{y_1}{y_2} = \frac{r}{R} \rightarrow y_1 = \frac{r}{R} y_2 = 0,1m$$

Αλλά αφού το σώμα  $\Sigma_1$  ανέρχεται κατά  $y_1 = 0,1m$ , η δυναμική του ενέργεια αυξήθηκε κατά:

$$\Delta U_1 = m_1 g y_1 = 2 \cdot 10 \cdot 0,1 J = 2J.$$

### Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

*Διονόσης Μάργαρης*