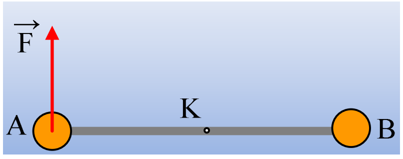
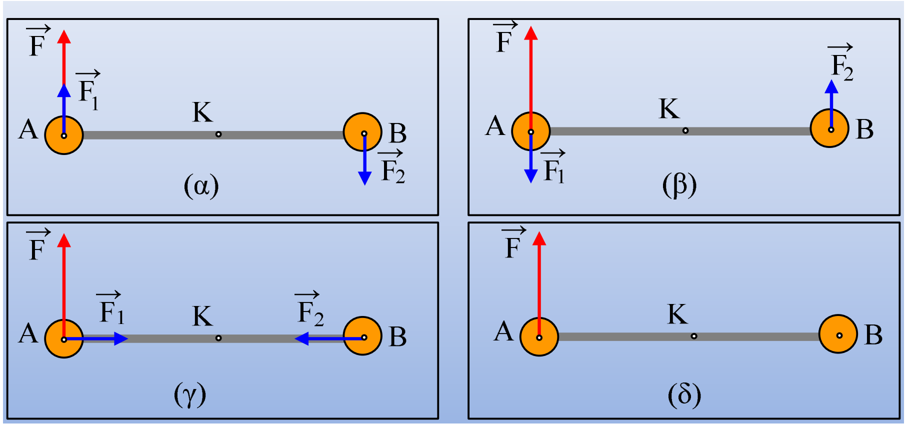
Δυνάμεις σε δύο σημειακές μάζες από αβαρή ράβδο.

Δυο σημειακές σφαίρες Α και Β με μάζες $m_A = m_B = M$ είναι κολλημένες στα άκρα μιας άκαμπτης λεπτής και αβαρούς ράβδου μήκους ℓ=2d.



Το σύστημα, τοποθετείται πάνω σε οριζόντιο λείο επίπεδο και ηρεμεί. Την χρονική στιγμή t = 0 , μια οριζόντια δύναμη μέτρου F, ασκείται στην αριστερή σφαίρα Α κάθετα στη ράβδο. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα δείχνει σωστά τις δυνάμεις που ασκεί η ράβδος στις σφαίρες, αμέσως μετά την άσκηση της δύναμης F;



Απάντηση

Το στερεό που έχουμε δημιουργήσει, θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση, την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από μια μεταφορική κίνηση με επιτάχυνση α_{cm} και μια στροφική γύρω από το κέντρο μάζας, που εξαιτίας της ισότητας των μαζών των σφαιρών Α και Β, είναι το μέσον Κ της ράβδου. Με εφαρμογή του 2^{ο} νόμου του Νεύτωνα έχουμε:

Για την μεταφορική κίνηση:

$$\sum \vec{F} = M_{ολ}\vec{a}_{cm} \rightarrow F = M_{ολ}a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F}{2M}.$$

Για την στροφική κίνηση:

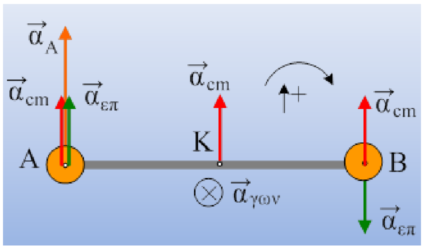
$$\Sigma\tau_{(K)} = I_{cm}\cdot\alpha_{γων} \rightarrow F\cdot d = I_{cm}\cdot\alpha_{γων}$$

Αλλά $I_{cm} = M\cdot d^2 + M\cdot d^2 = 2M\cdot d^2$, οπότε:

$$a_{γων} = \frac{F\cdot d}{2M\cdot d^2} = \frac{F}{2M\cdot d}$$

Κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.

Τη στιγμή t=0 το στερεό δεν έχει αποκτήσει ακόμη γωνιακή ταχύτητα, οπότε οι σημειακές σφαίρες δεν έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση. Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι επιταχύνσεις των δύο σφαιρών.



Η σφαίρα Α, έχει μια επιτάχυνση λόγω της μεταφορικής κίνησης την

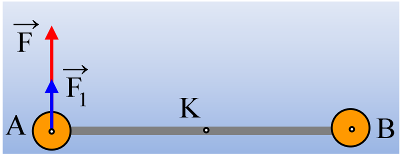
$α_{cm}$ και μια $α_{επ}$=$α_{γων}$· R, εξαιτίας της κυκλικής κίνησης που εκτελεί γύρω από το μέσον της ράβδου K και η οποία ισούται με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας. Συνεπώς:

$$a_A = a_{cm} + a_{\gamma\omega\nu} \cdot d = \frac{F}{2M} + \frac{F}{2M \cdot d} \cdot d = \frac{F}{M}$$

Ενώ με την ίδια λογική, η επιτάχυνση της σφαίρας B είναι:

$$a_B = a_{cm} - a_{\gamma\omega\nu} \cdot d = \frac{F}{2M} - \frac{F}{2M \cdot d} \cdot d = 0$$

Δηλαδή η σφαίρα B τη στιγμή t_0^+ δεν αποκτά επιτάχυνση.



Ας έρθουμε τώρα στις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σφαίρα. Αφού η B σφαίρα δεν έχει επιτάχυνση, αυτό σημαίνει ότι δεν δέχεται δύναμη από τη ράβδο.

Έστω τώρα ότι η A σφαίρα δέχεται μια δύναμη F_1, προφανώς στη διεύθυνση της επιτάχυνσης.

Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την σφαίρα A έχουμε:

$$ΣF_A=m_A \cdot α_A \rightarrow F+F_1= m_A \cdot α_A \rightarrow F_1= m_A \cdot α_A-F= 0$$

Συνεπώς ούτε η A σφαίρα δέχεται δύναμη από την ράβδο τη στιγμή που θα δεχτεί την επίδραση της δύναμης F.

Σχόλιο

Αν ασκούσε δυνάμεις η ράβδος στις δυο σφαίρες, τότε θα δεχόταν τις αντιδράσεις τους $F_1΄$και $F_2΄$. Συνεπώς και η ράβδος θα δεχόταν δυο δυνάμεις. Αλλά για τις δυνάμεις αυτές θα πρέπει ΣF΄=0 και Στ΄=0, αφού η ράβδος είναι αβαρής, συνεπώς m→0 και I→0.

Δηλαδή για την αβαρή ράβδο έχουμε:

ΣF΄=m·$α_{cm}$ όπου ΣF΄=0, αλλά και m→0, οπότε η εξίσωση ουσιαστικά δίνει: 0=0· $α_{cm}$

Στ΄=I·$α_{γων}$ όπου Στ΄=0, αλλά και I→0 και η αντίστοιχη εξίσωση γράφεται: 0=0· $α_{γων}$.

Αλλά τότε απορρίπτονται τα σχήματα (α) και (β), αφού αν ασκούντο οι δυνάμεις $F_1΄$και $F_2΄$θα είχαμε συνολική ροπή στην ράβδο. Επίσης απορρίπτεται το (γ) σχήμα, αφού για να ασκηθούν οι δυνάμεις αυτές με κατεύθυνση το κέντρο μάζας, θα πρέπει να είχαμε κάποια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής των δύο σφαιρών, οπότε οι δυνάμεις αυτές θα έπαιζαν το ρόλο της κεντρομόλου. Όμως τη στιγμή t=0, δεν έχει αποκτήσει ακόμη γωνιακή ταχύτητα το σύστημα, οπότε η κεντρομόλος είναι μηδενική. Έτσι φτάνουμε να δεχτούμε την (δ) εκδοχή, δηλαδή η ράβδος δεν ασκεί δυνάμεις στις δυο σφαίρες.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης