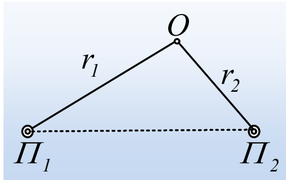
Επιφανειακή συμβολή με διαφορετικά πλάτη.



Στην επιφάνεια ενός υγρού υπάρχουν δύο πηγές εγκαρσίων κυμάτων Π_1 και Π_2, οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα με εξισώσεις:

$y_1=0,1\cdot\eta\mu(4\pi t)$ και $y_2=0,2\cdot\eta\mu(4\pi t)$ μονάδες στο S.I.

Έτσι δημιουργούνται επιφανειακά κύματα, τα οποία θεωρούμε ότι διαδίδονται με σταθερά πλάτη. Ένα σημείο Ο της επιφάνειας, απέχει αποστάσεις r_1=6m και r_2=4m αντίστοιχα από τις δύο πηγές. Το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή 10/3s.

i) Να υπολογιστεί το μήκος κύματος και η ταχύτητα των κυμάτων που δημιουργούνται.

ii) Να βρεθεί η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων που θα υποχρεωθεί να εκτελέσει το σημείο Ο, λόγω συμβολής των κυμάτων.

iii) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο μετά την συμβολή των δύο κυμάτων;

iv) Να υπολογιστεί ο λόγος K_1/K_2, όπου K_1 η μέγιστη κινητική ενέργεια μιας μάζας m στο σημείο Ο και K_2 η μέγιστη **δυνατή** κινητική ενέργεια, που μπορεί να έχει η ίδια μάζα, σε κάποιο άλλο σημείο της επιφάνειας του υγρού.

Απάντηση:

i) Τα δυο κύματα διαδίδονται στο ίδιο μέσο έχοντας την ίδια ταχύτητα διάδοσης. Προφανώς πρώτο θα φτάσει στο σημείο Ο, το κύμα από την πηγή Π_2, αφού είναι πλησιέστερη στο Ο. Αλλά τότε:

$$\upsilon=\frac{r_2}{\Delta t}=\frac{4m}{10/3\,s}=1,2m/s$$

Ενώ $\omega=2\pi f \to 4\pi=2\pi f \to f=2HZ$ και $\upsilon=\lambda f \to \lambda=\frac{\upsilon}{f}=\frac{1,2}{2}m=0,6m$

ii) Τα δυο κύματα που διαδίδονται έχουν εξισώσεις:

$$y_1=0,1\cdot\eta\mu 2\pi\left(2t-\frac{r_1}{0,6}\right) \quad \text{και} \quad y_2=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(2t-\frac{r_2}{0,6}\right)$$

Μεγαλύτερη φάση για την ταλάντωση του σημείου Ο, θα έχει το κύμα που θα φτάσει πρώτο, δηλαδή από την πηγή Π_2, συνεπώς η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων, τις οποίες θα **υποχρεωθεί** να εκτελέσει είναι:

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2\pi\left(2t-\frac{r_2}{0,6}\right)-2\pi\left(2t-\frac{r_1}{0,6}\right)=2\pi\frac{r_1-r_2}{0,6}\to$$

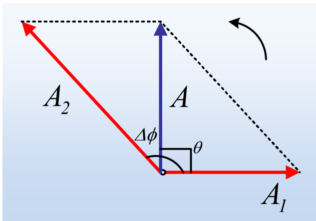
$$\Delta\varphi=2\pi\frac{r_1-r_2}{0,6}=2\pi\frac{6-4}{0,6}rad=\frac{20\pi}{3}rad=\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)rad$$

iii) Το σημείο Ο, μετά την συμβολή θα εκτελέσει σύνθετη ταλάντωση. Η ταλάντωση αυτή είναι σύνθεση δύο ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας με πλάτη $A_1 = 0{,}1m$ και $A_2 = 0{,}2m$ και με διαφορά φάσης 2π/3, οπότε το αποτέλεσμα της σύνθεσης θα είναι μια νέα αρμονική ταλάντωση της ίδιας συχνότητας, πλάτους:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$A = \sqrt{(0{,}1)^2 + 0{,}2^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{0{,}01+0{,}04-0{,}02}m = 0{,}1\sqrt{3}m$$

Και με διαφορά φάσης $\varepsilon\phi\theta = \dfrac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi} = \dfrac{0{,}2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}1+0{,}2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{0{,}1\sqrt{3}}{0}$ … δεν ορίζεται!



Ας δούμε λίγο τα περιστρεφόμενα διανύσματα για τις δύο αυτές ταλαντώσεις. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το περιστρέφομενο διάνυσμα που αναπαριστά το πλάτος A_2 προηγείται κατά Δφ= 2π/3 (στην πραγματικότητα κατά 6π+2π/3!!!) του A_1, ενώ το διάνυσμα A για την συνισταμένη ταλάντωση είναι κάθετο στο A_1!

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης του Ο για $t \geq \frac{r_1}{\upsilon}$ ή $t \geq 5s$ είναι:

$$y = 0{,}1\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left[2\pi\left(2t - \frac{r_1}{0{,}6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = 0{,}1\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left[2\pi\left(2t - \frac{6}{0{,}6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow$$

$$y = 0{,}1\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(4\pi t - 20\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)} \quad (\alpha)$$

ή $$y = 0{,}1\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)} \quad (\beta)$$

iv) Η μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει μια μάζα m, είναι αυτή που αντιστοιχεί σε μέγιστο δυνατό πλάτος. Αλλά αυτό θα είναι $A' = A_1 + A_2 = 0{,}3m$, πράγμα που συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε ενισχυτική συμβολή των δύο κυμάτων. Το πλάτος αυτό επιτυγχάνεται όταν η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων είναι Δφ=2kπ ή ισοδύναμα όταν $r_1 - r_2 = k\lambda$. Αλλά τότε ο λόγος γίνεται:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m(\omega A)^2}{\frac{1}{2}m(\omega A')^2} = \left(\frac{A}{A'}\right)^2 = \left(\frac{0{,}1\sqrt{3}}{0{,}3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Σχόλιο:

Οι εξισώσεις (α) και (β) Μαθηματικά είναι ισοδύναμες και μας δίνουν την απομάκρυνση για τη σύνθετη ταλάντωση του σημείου Ο. Η (α), για t=5s για παράδειγμα, δίνει φάση φ=π/2 και μας δείχνει ότι η ταλάντωση αυτή ξεκινά από την θέση +Α. Αξίζει να τονισθεί ότι t=0, δεν είναι η στιγμή που ξεκινά η σύνθετη ταλάντωση, αλλά η στιγμή που ξεκίνησαν την ταλάντωσή τους οι πηγές. Αν θέλαμε βέβαια συνάρτηση όπου για t=0 να ξεκινά η νέα σύνθετη ταλάντωση, η εξίσωση με τη μορφή (β) είναι σωστή, όπου θα μπορούσαμε να την γράψουμε με τη μορφή:

$$y = 0{,}1\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(4\pi t' + \frac{\pi}{2}\right)$$

Όπου $t' = t - \dfrac{r_1}{\upsilon}$ είναι ο χρόνος ταλάντωσης του σημείου Ο, μετά τη συμβολή.

dmargaris@gmail.com