Ειδική γραμμομοριακή θερμότητα.

Ιδανικό μονατομικό αέριο υποβάλλεται στην παρακάτω κυκλική μεταβολή:

- Εκτονώνεται ισόθερμα ΑΒ, μέχρι διπλασιασμού του όγκου του.
- Συμπιέζεται ισοβαρώς ΒΓ, μέχρι υποδιπλασιασμού του αρχικού του όγκου.
- Επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση με αντιστρεπτή μεταβολή ΓΑ, κατά την οποία η πίεση μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με τον όγκο ($P = \lambda \cdot V$).

α) Να παραστήσετε την κυκλική αυτή μεταβολή σε διάγραμμα P-Vκαι να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς λ. Αν θεωρήσουμε ότι όλα τα μεγέθη μετρώνται στο S.I. σε τι μονάδες θα μετρούνταν η σταθερά αυτή;

β) Να βρείτε την ειδική γραμμομοριακή θερμότητα $C_{ΓΑ}$ του αερίου για τη μεταβολή ΓΑ.

γ) Να υπολογίσετε το συντελεστή απόδοσης μιας θερμικής μηχανής που λειτουργεί με τον παραπάνω κύκλο και να εξηγήσετε αν η συγκεκριμένη μηχανή έχει νόημα.

Δίνεται $\ln 2 = 0,7$ και $C_V = 3R/2$

Απάντηση:

α) Α→Β ισόθερμη, από το νόμο Boyle

$$P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \Rightarrow P_A \cdot V_A = P_B \cdot 2V_A \Rightarrow P_B = P_A/2$$

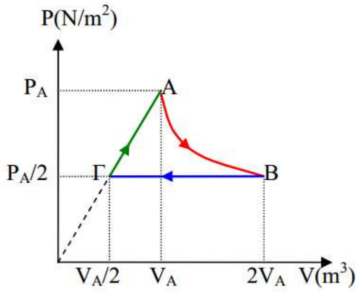
Β→Γ ισοβαρή, από το νόμο Gay – Lussac

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_Γ}{T_Γ} \Rightarrow V_B \cdot T_Γ = V_Γ \cdot T_B \Rightarrow 2V_A \cdot T_Γ = \frac{V_A}{2} \cdot T_A \Rightarrow T_Γ = \frac{T_A}{4}$$

γραμμική, λ·V

	Α	Β	Γ
P(N/m²)	P_A	$P_B = P_A/2$	$P_Γ = P_A/2$
V(m³)	V_A	$V_B = 2V_A$	$V_Γ = V_A/2$
T(K)	T_A	$T_B = T_A$	$T_Γ = T_A/4$

ισόθερμη ισοβαρή



Η μεταβολή ΓΑ ακολουθεί το νόμο $P = \lambda V$ και θα επαληθεύεται για όλες τις καταστάσεις της μεταβολής αυτής.

Έτσι $P_A = \lambda V_A \Rightarrow \lambda = \frac{P_A}{V_A}$ και η ΓΑ υπακούει στη σχέση $P = \frac{P_A}{V_A} \cdot V$

$P = \lambda \cdot V \Rightarrow \lambda = P/V$ το λ θα έχει μονάδες $\frac{Pa}{m^3} = \frac{\frac{N}{m^2}}{m^3} = \frac{N}{m^5} = \frac{\frac{Kg \cdot m}{s^2}}{m^5} = \frac{kg}{m^4 s^2}$

β) $W_{ΓΑ} = Εμβαδό_{τραπεζίου} = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2} = \frac{\left(P_A + \frac{P_A}{2}\right)\left(V_A - \frac{V_A}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{3P_A}{2}\frac{V_A}{2}}{2} \Rightarrow W_{ΓΑ} = \frac{3}{8} P_A V_A = 0,375 P_A V_A$

$$\Delta U_{\Gamma A} = nC_V \Delta T_{\Gamma A} = \frac{3}{2} nR\Delta \mathrm{T}_{\Gamma A} = \frac{3}{2} nR(T_A - T_\Gamma) = \frac{3}{2} nR(T_A - \frac{T_A}{4}) = \frac{3}{2} nR\frac{3T_A}{4} = \frac{9}{8} nRT_A = \frac{9}{8} P_A V_A$$

$$Q_{\Gamma A} = \Delta U_{\Gamma A} + W_{\Gamma A} = \frac{9}{8} P_A V_A + \frac{3}{8} P_A V_A = \frac{12}{8} P_A V_A = 1,5 P_A V_A$$

$$Q_{\Gamma A} = nC_{\Gamma A}\Delta T_{\Gamma A} \Rightarrow 1,5P_A V_A = nC_{\Gamma A}(T_A - T_\Gamma) \Rightarrow 1,5nRT_A = nC_{\Gamma A}(T_A - T_A/4) \Rightarrow$$

$$1,5nRT_A = 0,75T_A nC_{\Gamma A} \Rightarrow C_{\Gamma A} = 2R$$

γ) $W_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = P_A V_A \ln\left(\frac{2V_A}{V_A}\right) P_A V_A \ln(2) \Rightarrow W_{AB} = 0,7 P_A V_A$

$$W_{B\Gamma} = P_\Gamma \Delta V_{B\Gamma} = P_\Gamma (V_\Gamma - V_B) = \frac{P_A}{2}(\frac{V_A}{2} - 2V_A) = \frac{P_A}{2}(\frac{-3V_A}{2}) = -\frac{3}{4} P_A V_A \Rightarrow W_{B\Gamma} = -0,75 P_A V_A$$

$$W_{o\lambda} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} = 0,7P_A V_A - 0,75\, P_A V_A + 0,375\, P_A V_A = 0,325\, P_A V_A$$

$$Q_h = Q_{AB} + Q_{\Gamma A} = 0,7P_A V_A + 1,5P_A V_A = 2,2P_A V_A$$

$$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_h} = \frac{0,325 P_A V_A}{2,2 P_A V_A} = \frac{0,325}{2,2} \quad 0,147$$

Η αντίστοιχη μηχανή του Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών θα είχε απόδοση

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_\Gamma}{T_A} = 1 - \frac{\frac{T_A}{4}}{T_A} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$$

Επειδή ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι μικρότερος από την αντίστοιχη του Carnot η παραπάνω μηχανή έχει αντίκρυσμα στην πραγματικότητα.

Σχόλιο.

Στην εξαγωγή των μονάδων του συντελεστή λ αν δουλεύαμε με διαστατική ανάλυση θα είχαμε

Επιλέγουμε τις εξής βασικές διαστάσεις

- Μήκος [L] (length)
- Χρόνος [T] (time)
- Μάζα [M] (mass)

Από τον ορισμό της πίεσης

$$\pi\acute{\iota}\varepsilon\sigma\eta = \frac{\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta}{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}} = \frac{\frac{(\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha)\times(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)}{(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2}}{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)^2} = \frac{\frac{[\mathrm{M}]\cdot[L]}{[T]^2}}{[L]^2} = \frac{[\mathrm{M}]\cdot[L]}{[L]^2\cdot[T]^2} = [L]^{-1}[T]^{-2}[\mathrm{M}]$$

$P = \lambda \cdot V \Rightarrow \frac{[L][T]^{-2}[M]}{[L]^2} = \lambda [L]^3 \Rightarrow [\lambda] = \frac{[T]^{-2}[M]}{[L]^4}$ έτσι το λ έχει μονάδες $\frac{\mathrm{kg}}{m^4 s^2}$

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Χρήστος Αγριόδημας