

Ειδική γραμμομοριακή θερμότητα.

Ιδανικό μονατομικό αέριο υποβάλλεται στην παρακάτω κυκλική μεταβολή:

- Εκτονώνεται ισόθερμα AB, μέχρι διπλασιασμού του όγκου του.
- Συμπίεζεται ισοβαρώς ΒΓ, μέχρι υποδιπλασιασμού του αρχικού του όγκου.
- Επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση με αντιστρεπτή μεταβολή ΓΑ, κατά την οποία η πίεση μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με τον όγκο ($P = \lambda \cdot V$).

α) Να παραστήσετε την κυκλική αυτή μεταβολή σε διάγραμμα P-V και να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς λ . Αν θεωρήσουμε ότι όλα τα μεγέθη μετρώνται στο S.I. σε τι μονάδες θα μετρούνταν η σταθερά αυτή;

β) Να βρείτε την ειδική γραμμομοριακή θερμότητα $C_{\Gamma A}$ του αερίου για τη μεταβολή ΓΑ.

γ) Να υπολογίσετε το συντελεστή απόδοσης μιας θερμικής μηχανής που λειτουργεί με τον παραπάνω κύκλο και να εξηγήσετε αν η συγκεκριμένη μηχανή έχει νόημα.

Δίνεται $\ln 2 = 0,7$ και $C_V = 3R/2$

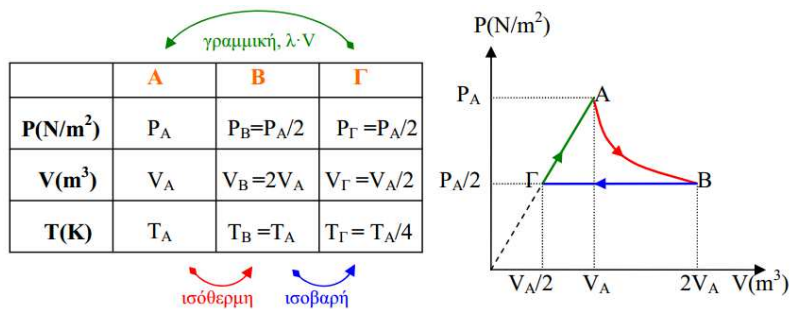
Απάντηση:

α) A→B ισόθερμη, από το νόμο Boyle

$$P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \Rightarrow P_A \cdot V_A = P_B \cdot 2V_A \Rightarrow P_B = P_A/2$$

B→Γ ισοβαρή, από το νόμο Gay – Lussac

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_\Gamma}{T_\Gamma} \Rightarrow V_B \cdot T_\Gamma = V_\Gamma \cdot T_B \Rightarrow 2V_A \cdot T_\Gamma = \frac{V_A}{2} \cdot T_A \Rightarrow T_\Gamma = \frac{T_A}{4}$$



Η μεταβολή ΓΑ ακολουθεί το νόμο $P = \lambda V$ και θα επαληθεύεται για όλες τις καταστάσεις της μεταβολής αυτής.

Έτσι $P_A = \lambda V_A \Rightarrow \lambda = \frac{P_A}{V_A}$ και η ΓΑ υπακούει στη σχέση $P = \frac{P_A}{V_A} \cdot V$

$$P = \lambda \cdot V \Rightarrow \lambda = P/V \quad \text{το } \lambda \text{ θα έχει μονάδες } \frac{Pa}{m^3} = \frac{N}{m^2 \cdot m^3} = \frac{N}{m^5} = \frac{Kg \cdot m}{s^2 \cdot m^5} = \frac{kg}{m^4 \cdot s^2}$$

$$\beta) W_{\Gamma A} = \text{Εμβαδό}_{\text{τραπέζιου}} = \frac{(B + \beta)v}{2} = \frac{\left(P_A + \frac{P_A}{2}\right) \left(V_A - \frac{V_A}{2}\right)}{2} = \frac{3P_A V_A}{2 \cdot 2} \Rightarrow W_{\Gamma A} = \frac{3}{8} P_A V_A = 0,375 P_A V_A$$

$$\Delta U_{\Gamma A} = nC_V \Delta T_{\Gamma A} = \frac{3}{2} nR \Delta T_{\Gamma A} = \frac{3}{2} nR(T_A - T_{\Gamma}) = \frac{3}{2} nR(T_A - \frac{T_A}{4}) = \frac{3}{2} nR \frac{3T_A}{4} = \frac{9}{8} nRT_A = \frac{9}{8} P_A V_A$$

$$Q_{\Gamma A} = \Delta U_{\Gamma A} + W_{\Gamma A} = \frac{9}{8} P_A V_A + \frac{3}{8} P_A V_A = \frac{12}{8} P_A V_A = 1,5 P_A V_A$$

$$Q_{\Gamma A} = nC_{\Gamma A} \Delta T_{\Gamma A} \Rightarrow 1,5 P_A V_A = nC_{\Gamma A} (T_A - T_{\Gamma}) \Rightarrow 1,5 nRT_A = nC_{\Gamma A} (T_A - T_A/4) \Rightarrow$$

$$1,5 nRT_A = 0,75 T_A nC_{\Gamma A} \Rightarrow C_{\Gamma A} = 2R$$

$$\gamma) W_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = P_A V_A \ln\left(\frac{2V_A}{V_A}\right) = P_A V_A \ln(2) \Rightarrow W_{AB} = 0,7 P_A V_A$$

$$W_{B\Gamma} = P_{\Gamma} \Delta V_{B\Gamma} = P_{\Gamma} (V_{\Gamma} - V_B) = \frac{P_A}{2} \left(\frac{V_A}{2} - 2V_A\right) = \frac{P_A}{2} \left(\frac{-3V_A}{2}\right) = -\frac{3}{4} P_A V_A \Rightarrow W_{B\Gamma} = -0,75 P_A V_A$$

$$W_{ολ} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} = 0,7 P_A V_A - 0,75 P_A V_A + 0,375 P_A V_A = 0,325 P_A V_A$$

$$Q_h = Q_{AB} + Q_{\Gamma A} = 0,7 P_A V_A + 1,5 P_A V_A = 2,2 P_A V_A$$

$$e = \frac{W_{ολ}}{Q_h} = \frac{0,325 P_A V_A}{2,2 P_A V_A} = \frac{0,325}{2,2} = 0,147$$

Η αντίστοιχη μηχανή του Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών θα είχε απόδοση

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_{\Gamma}}{T_A} = 1 - \frac{4}{T_A} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$$

Επειδή ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι μικρότερος από την αντίστοιχη του Carnot η παραπάνω μηχανή έχει αντίκρουσμα στην πραγματικότητα.

Σχόλιο.

Στην εξαγωγή των μονάδων του συντελεστή λ αν δουλεύαμε με διαστατική ανάλυση θα είχαμε

Επιλέγουμε τις εξής βασικές διαστάσεις

- Μήκος [L] (length)
- Χρόνος [T] (time)
- Μάζα [M] (mass)

Από τον ορισμό της πίεσης

$$\text{πίεση} = \frac{\text{δύναμη}}{\text{εμβαδό}} = \frac{(\text{μάζα}) \times (\text{μήκος})}{(\text{χρόνος})^2} = \frac{[M] \cdot [L]}{[T]^2} = \frac{[M] \cdot [L]}{[L]^2 \cdot [T]^2} = [L]^{-1} [T]^{-2} [M]$$

$$P = \lambda \cdot V \Rightarrow \frac{[L][T]^{-2}[M]}{[L]^2} = \lambda [L]^3 \Rightarrow [\lambda] = \frac{[T]^{-2}[M]}{[L]^4} \text{ έτσι το } \lambda \text{ έχει μονάδες } \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{s}^2}$$

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Χρήστος Αγριόδημας