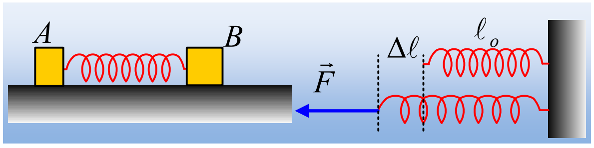
Ένα μηχανικό σύστημα και κρούση.

Ένα Φύλλο Εργασίας.

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα Α και Β με μάζες 1kg και 2kg αντίστοιχα, δεμένα στα άκρα ενός ιδανικού ελατηρίου με φυσικό μήκος $\ell_0 = 0{,}5m$ και σταθεράς k=50N/m, όπως στο σχήμα.

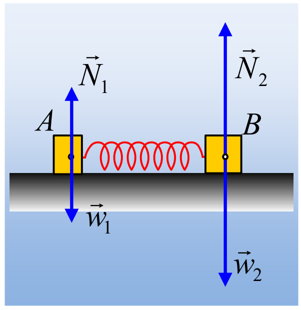


Υπενθυμίζεται ότι ένα ιδανικό ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke F=k·Δℓ, όπου F η δύναμη που το παραμορφώνει και Δℓ η παραμόρφωσή του (επιμήκυνση ή συσπείρωσή του).

1) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα.

   i) Το ελατήριο έχει ή όχι το φυσικό μήκος του; Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.

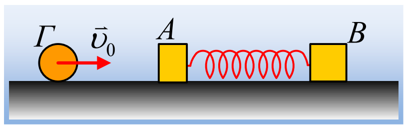
   Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα. Τα σώματα Α και Β δεν δέχονται οριζόντια δύναμη, αφού σε αντίθετη περίπτωση δεν θα ισορροπούσαν. Αλλά τότε το ελατήριο δεν ασκεί δυνάμεις, πράγμα που σημαίνει ότι το ελατήριο δεν έχει παραμόρφωση, έχοντας το φυσικό μήκος του. Προφανώς κάθε σώμα ισορροπεί και στην κατακόρυφη διεύθυνση, συνεπώς η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική και το σύστημα είναι μονωμένο.



   ii) Το σύστημα των σωμάτων Α και Β:

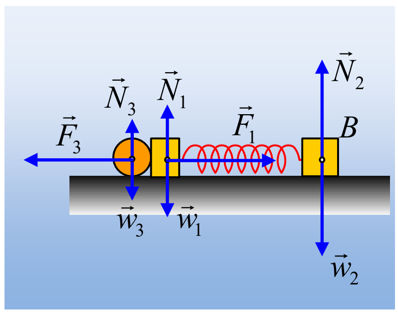
   α) είναι μονωμένο, β) δεν είναι μονωμένο.

2) Μια μπάλα Γ, διαμέτρου ίσης με το ύψος του Α σώματος και μάζας 0,5kg, κινείται (χωρίς να περιστρέφεται) με ταχύτητα $υ_o$=5m/s με διεύθυνση τον άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Η μπάλα συγκρούεται με το σώμα Α και αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα μέτρου $υ_3$=1m/s με φορά προς τα αριστερά. Δεχόμαστε ότι η κρούση είναι ακαριαία με αμελητέα διάρκεια και το σώμα Α, «δεν προλαβαίνει» να μετακινηθεί, παρότι αποκτά ταχύτητα λόγω κρούσης.



   i) Για να βρούμε την ταχύτητα που αποκτά το σώμα Α, αμέσως μετά την κρούση, θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής. Αλλά για να το κάνουμε αυτό, χρειαζόμαστε ένα μονωμένο σύστημα. Ποιο είναι αυτό και γιατί είναι μονωμένο;

   Στη διάρκεια της κρούσης της μπάλας με το σώμα Α, οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, όπου F_1 η δύναμη που ασκεί η μπάλα στο σώμα Α και F_3 η αντίδρασή της (η οποία ασκείται στην μπάλα). Έτσι το σύστημα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το σύστημα μπάλα- σώμα Α, το οποίο είναι μονωμένο αφού $\vec{w}_1 + \vec{N}_1 = 0$ και $\vec{w}_3 + \vec{N}_3 = 0$. Κάθε



σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, ενώ οι δυνάμεις F_1 και F_3 είναι εσωτερικές. Εξάλλου αφού δεν μετακινείται πρακτικά το Α σώμα το ελατήριο συνεχίζει να έχει το φυσικό μήκος του και δεν ασκεί δυνάμεις στα σώματα.

ii) Να υπολογίστε την ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Α αμέσως μετά την κρούση.

Εφαρμόζοντας για το σύστημα μπάλα-σώμα Α παίρνουμε:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετα}:$$

$$m_3 \cdot υ_0 = m_1 υ_1 + m_3 υ_3$$

και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, παίρνουμε:

$$0,5 \cdot 5 kgm/s = 1kg \cdot υ_1 + 0,5 \cdot (-1) kgm/s \rightarrow$$

$$υ_1 = 3m/s.$$

iii) Να εξετάσετε αν έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ελάχιστα πριν την κρούση μπάλα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{πριν} = \frac{1}{2} m_3 υ_0^2 = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 5^2 J = 6,25J$$

Αμέσως μετά η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων είναι:

$$K_{ολ} = K_1 + K_3 = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2} m_3 υ_3^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 3^2 J + \frac{1}{2} 0,5 \cdot 1^2 J = 4,75J$$

Συνεπώς κατά την κρούση έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας ίσης με *6,25J-4,75J=1,5J,* ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική.

3) Ας αφήσουμε τη μπάλα να κινείται προς τα αριστερά και ας εστιάσουμε στα σώματα Α και Β. Αμέσως μετά την κρούση να υπολογίσετε:

i) Την ορμή κάθε σώματος.

ii) Τον αντίστοιχο ρυθμό μεταβολής της ορμής του.

i) Για τις ορμές έχουμε:

$P_1 = m_1 \cdot υ_1 = 1 \cdot 3 kgm/s = 3kgm/s$ *με φορά προς τα δεξιά.*

$$P_2 = m_2 \cdot υ_2 = 0$$

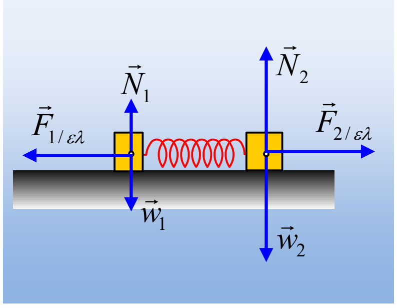
ii) Ενώ για τους ρυθμούς μεταβολής της ορμής:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \Sigma \vec{F}_1 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \Sigma \vec{F}_2 = 0$$

Αφού το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του και δεν ασκεί δυνάμεις.

4) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, η ταχύτητα του Α σώματος έχει μειωθεί στην τιμή $υ_1' = 2m/s$, κινούμενο πάντα προς τα δεξιά. Για τη στιγμή αυτή:

i) Για να βρούμε την ταχύτητα του Β σώματος σκεφτόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής. Μπορούμε να το κάνουμε και γιατί;



Τη στιγμή t_1 το ελατήριο έχει συσπειρωθεί ασκώντας δυνάμεις στα σώματα, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε στο σύστημα σώμα Α-σώμα Β-ελατήριο, οι δυνάμεις του ελατηρίου είναι εσωτερικές ενώ η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων συνεχίζει να είναι μηδενική:

$$\vec{w}_1 + \vec{N}_1 = 0 \text{ και } \vec{w}_2 + \vec{N}_2 = 0$$

Αλλά τότε το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του παραμένει σταθερή. Έτσι:

$$\vec{P}_{\alpha\rho} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$m_1 \cdot \upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$$

και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, παίρνουμε:

$$1 \cdot 3kgm/s = 1kg \cdot 2m/s + 2kg \cdot \upsilon_2' \rightarrow$$

$$\upsilon_2' = 0,5m/s.$$

ii) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων Α και Β και να συγκριθεί με την κινητική ενέργεια του Α σώματος ελάχιστα μετά την κρούση του με την μπάλα.

Αμέσως μετά την κρούση κινητική ενέργεια έχει μόνο το Α σώμα:

$$K_{A/a} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 3^2 J = 4,5J$$

Τη στιγμή t_1 η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων είναι:

$$K_{o\lambda} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 2^2 J + \frac{1}{2}2 \cdot 0,5^2 J = 2,25J$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η κινητική ενέργεια έχει μειωθεί κατά 4,5J-2,25J=2,25J η οποία έχει μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

iii) Όταν ένα ελατήριο έχει παραμορφωθεί έχει δυναμική ενέργεια, η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση $U = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$, όπου $\Delta\ell$ η επιμήκυνση ή η συσπείρωσή του. Μπορείτε να υπολογίσετε τη στιγμή t_1 την επιμήκυνση ή τη συσπείρωση του ελατηρίου;

Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι 2,25J μετατρέπονται από κινητική ενέργεια του Α σώματος σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, λόγω συσπείρωσής του κατά $\Delta\ell$

$$U = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \rightarrow \Delta\ell = \pm\sqrt{\frac{2U}{k}} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 2,25}{50}}m = \pm 0,3m$$

Στην περίπτωσή μας βέβαια το μήκος του ελατηρίου μειώθηκε και $\Delta\ell = -0,3m$.

iv) Για την στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

α) Η ορμή κάθε σώματος.

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής του.

α) Για τις ορμές έχουμε:

$P_1 = m_1 \cdot \upsilon_1' = 1 \cdot 2kgm/s = 2kgm/s$ *με φορά προς τα δεξιά.*

$P_2=m_2\cdot\upsilon_2=2\cdot 0{,}5kgm/s=1kgm/s$, επίσης με φορά προς τα δεξιά.

v) Ενώ για τους ρυθμούς μεταβολής της ορμής:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt}=\Sigma\vec{F}_1 \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt}=\Sigma\vec{F}_2$$

Αλλά τελικά συνισταμένη δύναμη σε κάθε σώμα είναι η δύναμη του ελατηρίου, μέτρου:

$$F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot|\Delta\ell|=50\cdot 0{,}3N=15N.$$

Οπότε με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά έχουμε:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt}=\vec{F}_{1/\varepsilon\lambda}=-15kg\frac{m}{s} \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt}=\vec{F}_{2/\varepsilon\lambda}=+15kg\frac{m}{s}$$

5) Να συμπληρώσετε τα κενά στο παρακάτω κείμενο, που περιγράφει την κίνηση των σωμάτων Α και Β. Καθώς το Α σώμα, αποκτά ταχύτητα μετά την κρούση προς τα δεξιά, αρχίζει να συσπειρώνει το ελατήριο, πλησιάζοντας το σώμα Β. Αλλά τότε το ελατήριο ασκεί δυνάμεις στα σώματα, με αποτέλεσμα το Α σώμα να επιβραδύνεται και το σώμα Β να επιταχύνεται. Για όσο χρονικό διάστημα η ταχύτητα του Α είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του Β, η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων μειώνεται. Όταν όμως το Β σώμα αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Α, τότε η απόσταση μεταξύ των σωμάτων αυξάνεται. Συνεπώς όταν οι ταχύτητες των σωμάτων γίνουν ίσες η απόσταση μεταξύ των σωμάτων Α και Β γίνεται ελάχιστη.

6) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σωμάτων τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ τους γίνει ελάχιστη. Πόση είναι η ελάχιστη αυτή απόσταση;

Τη στιγμή που η απόσταση των σωμάτων γίνει λοιπόν ελάχιστη, τα δυο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες, οπότε από την διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\alpha\rho}=\vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$m_1\cdot\upsilon_1=m_1v+m_2v$$

και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, παίρνουμε:

$$v=\frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}=\frac{1\cdot 3}{1+2}m/s=1m/s$$

Εφαρμόζοντας εξάλλου τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα, για τις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή της κοινής ταχύτητας, παίρνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+0=\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2v^2+\frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2$$

$$\Delta\ell'=-\sqrt{\frac{m_1\upsilon_1^2-(m_1+m_2)v^2}{k}}=-\sqrt{\frac{1\cdot 3^2-(1+2)1^2}{50}}m\approx -0{,}35m$$

Αλλά τότε το μήκος του νήματος τη στιγμή αυτή είναι 0,5m-0,35m=0,15m.

7) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος στην παραπάνω θέση.

Τη στιγμή αυτή το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$F_{ελ}=k\cdot|\Delta\ell'|=50\cdot 0{,}35N=17{,}5N.$$

Οπότε με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά έχουμε:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt}=\vec{F}_{1/ελ}=-17{,}5kg\frac{m}{s} \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt}=\vec{F}_{2/ελ}=+17{,}5kg\frac{m}{s}$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης