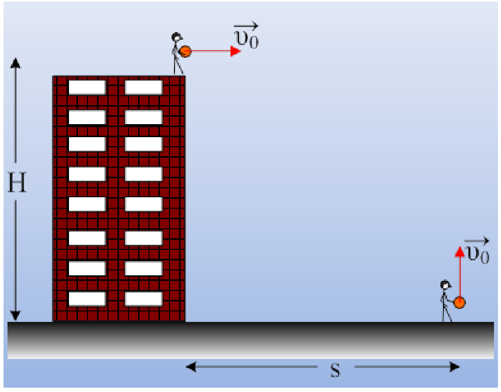
Μια Οριζόντια βολή και μια συνάντηση.



Δυο φίλοι, ο Αντώνης και ο Κωστής κρατούν στα χέρια τους δυο όμοιες μικρές μπάλες. Ο Αντώνης βρίσκεται στην ταράτσα ενός κτηρίου ύψους H=30m, ενώ ο Κωστής στο έδαφος, σε απόσταση s, από το κτήριο.

Σε μια στιγμή πετάνε ταυτόχρονα τις μπάλες, ο Αντώνης οριζόντια και ο Κωστής κατακόρυφα προς τα πάνω, με την ίδια (κατά μέτρο) ταχύτητα $υ_0$=20m/s. Οι δυο μπάλες συγκρούονται πριν προλάβουν να φτάσουν στο έδαφος. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, η αρχική κατακόρυφη απόσταση των θέσεων εκτόξευσης θεωρείται ίση με το ύψος Η του κτιρίου, ενώ g=10m/s^2.

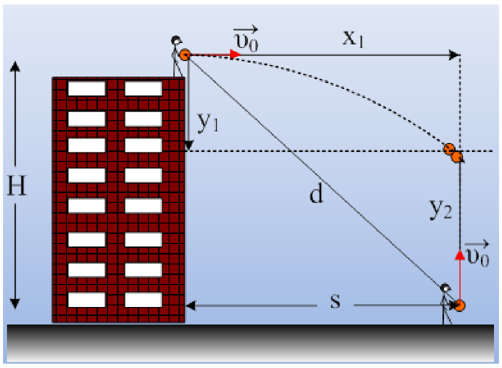
i) Να βρεθεί η θέση της μπάλας που πέταξε κάθε παιδί τη στιγμή t_1=1s.

ii) Ποια χρονική στιγμή συγκρούονται οι δυο μπάλες;

iii) Να βρεθεί η απόσταση των δύο παιδιών.

iv) Αν κατά την εκτόξευση, ο Αντώνης καθυστερούσε να πετάξει την δική του μπάλα, αλλά και πάλι οι μπάλες συγκρουόταν, να βρεθεί το χρονικό διάστημα καθυστέρησης.

Απάντηση:



i) Η πρώτη μπάλα, που εκτελεί την οριζόντια βολή, εκτελεί σύνθετη κίνηση. Έτσι στην οριζόντια διεύθυνση, κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με εξίσωση:

$$x_1=υ_0\cdot t \quad (1)$$

Ενώ στην κατακόρυφη διεύθυνση η κίνησή της είναι ελεύθερη πτώση με εξίσωση:

$$y_1= ½\, gt^2 \quad (2)$$

Προφανώς οι παραπάνω εξισώσεις έχουν γραφτεί, θεωρώντας ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο εκτόξευσης και με θετικές φορές, προς τα δεξιά και προς τα κάτω.

Έτσι τη στιγμή t_1=1s, η πρώτη μπάλα έχει μετατοπισθεί οριζόντια κατά $x_1= υ_0\cdot t$ =20m/s·1s=20m, ενώ έχει πέσει κατακόρυφα κατά $y_1= ½\, gt^2 = ½ \cdot 10\cdot 1$m=5m.

Η δεύτερη μπάλα, που εκτόξευσε ο Κωστής, εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω, μια κίνηση ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη), για την οποία:

$$y_2= υ_0 t – ½\, gt^2 \quad (3)$$

Να σημειωθεί ότι για να γράψουμε με αυτόν τον τρόπο την παραπάνω εξίσωση, έχουμε δεχτεί για την κίνηση αυτή θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση.

Συνεπώς η δεύτερη μπάλα έχει ανέβει κατά $h_2= y_2= υ_0 t – ½\, gt^2$ =20·1m- ½ ·10·1m=15m.

ii) Τη στιγμή t_2 που οι δυο μπάλες συγκρούονται, βρίσκονται στην ίδια θέση, συνεπώς η κατακόρυφη απόσταση που έπεσε η πρώτη και το ύψος που ανέβηκε η δεύτερη, θα ικανοποιούν τη σχέση:

$$y_1+h_2= y_1+y_2=H \rightarrow$$

$$½\, gt^2 \;+ \upsilon_0 t - ½\, gt^2 \;=H\rightarrow$$

$$\upsilon_0 t =H\rightarrow$$

$$t_2=\frac{H}{\upsilon_0}=\frac{30m}{20m/s}=1{,}5s$$

iii) Η απόσταση s, του Κωστή από το κτήριο, είναι ίση με την οριζόντια απόσταση που διένυσε η πρώτη μπάλα, μέχρι να συναντήσει την δεύτερη. Συνεπώς:

$$s=x_1= \upsilon_0\cdot t =20m/s\cdot 1{,}5s=30m$$

Αλλά τότε με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος παίρνουμε:

$$d=\sqrt{H^2+s^2}=\sqrt{30^2+30^2}m=30\sqrt{2}m$$

iv) Έστω ότι ο Κωστής εκτόξευε κατακόρυφα την μπάλα του τη στιγμή t=0, ενώ ο Αντώνης τη στιγμή t=t΄, τότε οι παραπάνω εξισώσεις (1), (2) και (3) θα έπαιρναν τη μορφή:

$x_1=\upsilon_0\cdot(t-t΄)$ (1α), $y_1= ½\, g(t-t΄)^2$ (2α) και $y_2= \upsilon_0 t - ½\, gt^2$ (3)

Αλλά η σύγκρουση προφανώς θα συμβεί στην κατακόρυφη που περνά από την θέση που βρίσκεται ο Κωστής, συνεπώς:

$$x_1=\upsilon_0\cdot(t-t΄) \rightarrow t-t'=\frac{x_1}{\upsilon_0}=\frac{s}{\upsilon_0}=\frac{30m}{20m/s}=1{,}5s$$

ενώ τη στιγμή της συνάντησης:

$$y_1+h_2= y_1+y_2=H \rightarrow$$

$$½\, g(t-t΄)^2 + \upsilon_0 t - ½\, gt^2 \;=H \rightarrow$$

$$½\; 10\cdot 1{,}5^2+20\cdot t- ½\; 10t^2=30 \rightarrow$$

$$5t^2-20t+18{,}75=0 \rightarrow$$

$$t_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 5\cdot 18{,}75}}{10}=\frac{20\pm\sqrt{25}}{10} \rightarrow$$

$$t_1=1{,}5s \text{ ή } t_2=2{,}5s$$

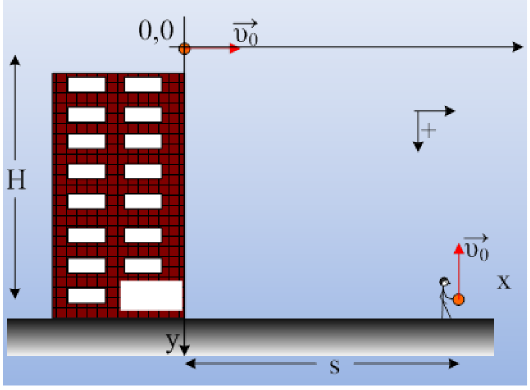
Η πρώτη λύση είναι αυτή που βρήκαμε και στα προηγούμενα ερωτήματα και αντιστοιχεί στην στιγμή που η μπάλα που εκτόξευσε ο Κωστής ανεβαίνει, η δεύτερη λύση (t_2=2,5s) είναι η στιγμή που η μπάλα αυτή, αφού έφτασε στο μέγιστο ύψος, κινήθηκε προς τα κάτω και έφτασε στην ίδια θέση, που έγινε και η πρώτη κρούση.

Συνεπώς η κρούση έγινε τη στιγμή t_2=2,5s, ενώ η μπάλα που εκτελεί οριζόντια βολή είχε διάρκεια κίνησης t-t΄=1,5s. Έτσι η χρονική καθυστέρηση εκτόξευσης είναι 1s.

Σχόλια

Η παραπάνω λύση, δεν εμφανίζει αυστηρή μαθηματική επεξεργασία, επειδή απευθύνεται σε όλους τους μαθητές. Αλλά για τους καλούς μαθητές της Κατεύθυνσης, δίνεται παρακάτω, μια πιο αυστηρή λύση.

1) Έστω ότι επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων x,y, όπως αυτό του σχήματος:



Για την πρώτη μπάλα:

$$x_1=\upsilon_0 \cdot t \quad (1)$$
$$y_1= \tfrac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Για την δεύτερη μπάλα:

$$x_2=s \quad (3)$$
$$y_2=H-\upsilon_0 t+ \tfrac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

αφού αρχικά βρίσκεται στην θέση y=H και κινήθηκε έχοντας αρνητική αρχική ταχύτητα και θετική επιτάχυνση.

Προσοχή όμως, τα x και y των παραπάνω σχέσεων δίνουν τις συντεταγμένες κάθε μπάλας στο σύστημα που έχουμε πάρει. Έτσι τη στιγμή της συνάντησης:

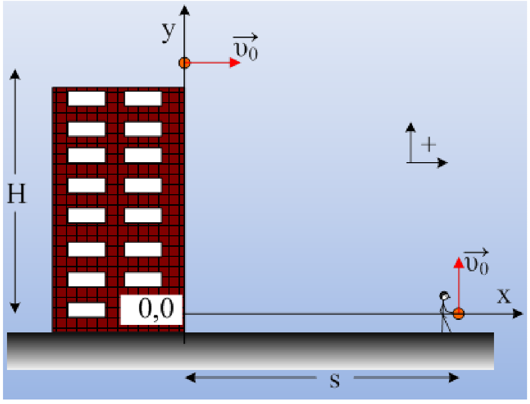
$$x_1=x_2 \text{ και } y_1=y_2,$$

από όπου

$$\tfrac{1}{2} g t^2 = H-\upsilon_0 t+ \tfrac{1}{2} g t^2 \rightarrow$$

$$H=\upsilon_0 t \rightarrow t_2=\frac{H}{\upsilon_0}=\frac{30m}{20m/s}=1{,}5s \ldots$$

2) Θα μπορούσαμε βέβαια να πάρουμε άλλο σύστημα αξόνων, για παράδειγμα αυτό του παρακάτω σχήματος:



Τότε οι εξισώσεις θα ήταν:

Για την πρώτη μπάλα:

$$x_1=\upsilon_0 \cdot t \quad (1)$$
$$y_1=H- \tfrac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Για την δεύτερη μπάλα:

$$x_2=s \quad (3)$$

$$y_2=\upsilon_0 t- ½ gt^2 \quad (4)$$

αφού τώρα η θέση της πρώτης μπάλας μετριέται από το έδαφος, ενώ η επιτάχυνσή της είναι αρνητική με βάση τη θετική φορά που έχουμε πάρει.

Προφανώς θα μπορούσαμε να πάρουμε «άπειρα» συστήματα αξόνων, με λίγο ή πολύ διαφορετικές μορφές εξισώσεων, αλλά η ουσία δεν θα άλλαζε….

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης