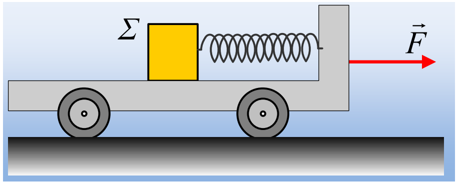
Ένα σώμα πάνω σε αμαξίδιο.



Ένα σώμα Σ μάζας m=9kg ηρεμεί πάνω σε ένα ακίνητο αμαξίδιο μάζας M=1kg, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=40N/m, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του ℓ_0=40cm. Σε μια στιγμή (t_0=0) ασκούμε στο αμαξίδιο μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=4N, μέχρι τη στιγμή t_1=10s, όπου η δύναμη παύει να ασκείται.

i) Αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F (για $t=0^+$), να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής:
   α) του σώματος Σ και
   β) του αμαξιδίου.

ii) Να υπολογιστεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων, τη στιγμή t_2 = 4s.

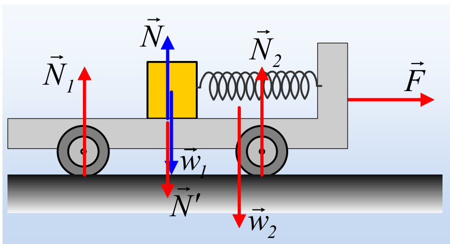
iii) Κάποια στιγμή (t_3<10s) το ελατήριο έχει μήκος ℓ_1=55cm. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος τη στιγμή αυτή.

iv) Μια στιγμή (t_4 >10s) η ταχύτητα του αμαξιδίου έχει μέτρο $υ_2$= 3,2m/s, με φορά προς τα δεξιά, ενώ το ελατήριο έχει μήκος ℓ_1=30cm. Να βρεθούν για τη στιγμή αυτή:
   α) Η ταχύτητα του σώματος Σ.
   β) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος.

v) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης F;

Δίνεται ότι δεν αναπτύσσονται τριβές, ούτε μεταξύ σώματος Σ και αμαξιδίου, ούτε μεταξύ αμαξιδίου και εδάφους. Υπενθυμίζεται ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι ανάλογη της παραμόρφωσής του, σύμφωνα με το νόμο του Hooke $F_{ελ} = k \cdot \Delta\ell$, ενώ ένα παραμορφωμένο ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση $U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$.

Απάντηση:



i) Αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F, το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, με αποτέλεσμα να μην ασκεί δυνάμεις στα άκρα του. Αλλά τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και στο αμαξίδιο είναι αυτές που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα.

α) Για το σώμα Σ:

$$\frac{\Delta \vec{p}_Σ}{\Delta t} = Σ\vec{F} = 0$$

β) Για το αμαξίδιο:

$$\frac{\Delta\vec{p}_a}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}_a=\vec{F}\rightarrow\frac{\Delta p_a}{\Delta t}=F=4kg\cdot m/s^2.$$

ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα Σ-αμαξίδιο παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}_{o\lambda}$$

Όπου $\Sigma\vec{F}_{o\lambda}$ το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα του συστήματος. Όμως οι εσωτερικές δυνάμεις αποτελούν πάντα ζεύγη δράσης – αντίδρασης όπου $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, οπότε οι μόνες δυνάμεις που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη είναι οι εξωτερικές δυνάμεις. Στην περίπτωσή μας τα δυο βάρη $\vec{w}_1,\vec{w}_2$, οι αντιδράσεις του επιπέδου $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$ και η δύναμη $\vec{F}$. Αλλά το σύστημα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε $\Sigma\vec{F}_y=0\rightarrow\vec{w}_1+\vec{w}_2+\vec{N}_1+\vec{N}_2=0$ και η εξίσωση γίνεται (λαμβάνοντας υπόψη ότι η δύναμη F είναι σταθερή, οπότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος και με το μέσο ρυθμό μεταβολής):

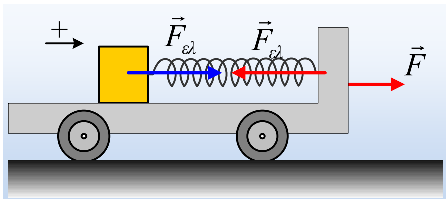
$$\frac{\Delta\vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}=\vec{F}\rightarrow$$

$$\frac{p_{o\lambda/2}-0}{t_2-0}=F\rightarrow p_{o\lambda/2}=F\cdot t_2=16kg\cdot m/s$$

$$\text{Ενώ }\frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t}=F=4kg\cdot m/s^2.$$

iii) Τη στιγμή t_3 που το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell=\ell-\ell_0=0{,}55m-0{,}4m=0{,}15m$ ασκεί δυνάμεις στο σώμα Σ και στο αμαξίδιο, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta\ell=40\cdot 0{,}15N=6N.$$



Αλλά τότε για το σώμα Σ:

$$\frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}\rightarrow\frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t}=F_{\varepsilon\lambda}=6kg\cdot m/s^2.$$

Για το αμαξίδιο:

$$\frac{\Delta\vec{p}_a}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}_a=\vec{F}+\vec{F}_{\varepsilon\lambda}\rightarrow\frac{\Delta p_a}{\Delta t}=F-F_{\varepsilon\lambda}=(4-6)kg\cdot m/s^2=-2kg\cdot m/s^2.$$

iv) Μετά την κατάργηση της ασκούμενης δύναμης F, το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο, οπότε από την αρχή διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$\vec{p}_{o\lambda/1}=\vec{p}_{o\lambda/4}\quad(1)$$

Όπου $\vec{p}_{o\lambda/1}$ η ορμή του συστήματος τη στιγμή t_1=10s. Αλλά από το γενικευμένο νόμο, εφαρμόζοντάς τον στο διάστημα 0-10s παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\vec{p}_{ολ/1}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}_{εξ} = \vec{F} \rightarrow$$

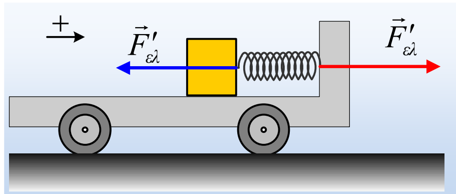
$$\frac{p_{ολ/1} - 0}{t_1 - 0} = F \rightarrow \; p_{ολ/1} = F \cdot t_1 = 4 \cdot 10 kg \cdot m/s = 40 kg \cdot m/s$$

α) Με βάση τα παραπάνω αν $υ_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ τη στιγμή t_4, παίρνουμε από την (1):

$$p_{ολ/1} = m \cdot υ_1 + M \cdot υ_2 \rightarrow$$

$$υ_1 = \frac{p_{ολ/1} - Mυ_2}{m} = \frac{40 - 1 \cdot 3{,}2}{9} m/s \approx 4{,}1 m/s$$

β) Τη χρονική στιγμή t_4 το ελατήριο είναι **συσπειρωμένο** κατά $\Delta\ell' = \ell_0 - \ell_4 = 0{,}1m$ ασκώντας στα σώματα δυνάμεις, όπως στο σχήμα, με μέτρο:



$$F'_{ελ} = k \cdot \Delta\ell' = 40 \cdot 0{,}1N = 4N$$

οπότε η ορμή κάθε σώματος μεταβάλλεται με ρυθμό:

Σώμα Σ:

$$\frac{\Delta\vec{p}_{Σ}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{\Delta p_{Σ}}{\Delta t} = -F'_{ελ} = -4 kg \cdot m/s^2.$$

Αμαξίδιο:

$$\frac{\Delta\vec{p}_{a}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}_{a} = +\vec{F}'_{ελ} \rightarrow \frac{\Delta p_{a}}{\Delta t} = +F'_{ελ} = +4 kg \cdot m/s^2.$$

v) Μόλις πάψει η άσκηση της δύναμης F, μέσω του έργου της οποίας μεταφέρεται ενέργεια στο σύστημα, η ενέργειά του παραμένει σταθερή. Έτσι η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα, είναι ίση με την ενέργεια του συστήματος τη στιγμή t_4.

$$W_F = K_1 + K_2 + U_{ελ} \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m υ_1^2 + \frac{1}{2} M υ_2^2 + \frac{1}{2} k (\Delta\ell')^2 \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} 9 \cdot 4{,}1^2 J + \frac{1}{2} 1 \cdot 3{,}2^2 J + \frac{1}{2} 40 \cdot 0{,}1^2 J \approx 80{,}97 J.$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης