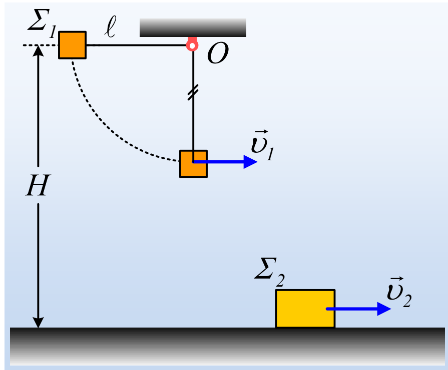
Η ορμή και η μεταβολή της ορμής ενός συστήματος.



Από ένα σημείο Ο σε ύψος Η=10m, κρέμεται ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m=1kg στο άκρο νήματος μήκους l=5m. Εκτρέπουμε το σώμα $Σ_1$, ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και το αφήνουμε να κινηθεί. Το νήμα κόβεται τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφο, με αποτέλεσμα το σώμα να πέφτει στο έδαφος και να συγκρούεται με ένα σώμα $Σ_2$ μάζας Μ=5kg, το οποίο κινείται στο λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $υ_2$=4m/s.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του $Σ_1$ τη στιγμή που κόβεται το νήμα καθώς και η μεταβολή της ορμής του, στο διάστημα της κίνησής του στο άκρο του νήματος.

ii) Έστω t_0=0 η στιγμή που κόβεται το νήμα. Να υπολογιστεί η ορμή του συστήματος $Σ_1$-$Σ_2$, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος τη στιγμή t_0.

iii) Ποια η οριζόντια απόσταση του σώματος $Σ_2$ τη στιγμή t_0, από την κατακόρυφο που περνά από το σημείο Ο;

iv) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του σώματος $Σ_1$, από τη στιγμή t_0, μέχρι τη στιγμή t_1, ελάχιστα πριν συγκρουστεί με το σώμα $Σ_2$.

v) Να βρεθεί η ορμή του συστήματος $Σ_1$-$Σ_2$, ελάχιστα πριν την σύγκρουσή τους.

vi) Αν κατά τη κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα, το οποίο συνεχίζει να κινείται οριζόντια, να υπολογίστε τη μεταβολή της ορμής του συστήματος η οποία οφείλεται στην κρούση.

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ τα σώματα να θεωρηθούν αμελητέων διαστάσεων.

Απάντηση:

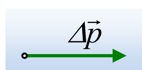
i) Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος $Σ_1$ στο άκρο του νήματος, η μόνη δύναμη που παράγει έργο, είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Έτσι εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, ανάμεσα στην αρχική και τελική θέση θεωρώντας μηδέν τη δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση που κόβεται το νήμα και παίρνουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$0+mg\ell=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \rightarrow \upsilon_1=\sqrt{2g\ell} \rightarrow$$

$$\upsilon_1=\sqrt{2g\ell}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 5}m/s=10m/s$$

Αλλά τότε η μεταβολή της ορμής του σώματος, στη διάρκεια της κίνησής του είναι:

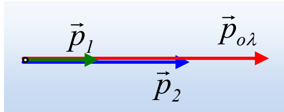


$$\Delta\vec{p}=\vec{p}_1-\vec{p}_0=\vec{p}_1-0=m\vec{\upsilon}_1$$

Είναι δηλαδή ένα διάνυσμα με οριζόντια διεύθυνση, όπως στο διπλανό σχήμα με μέτρο:

$$\Delta p = 1 \cdot 10 kg \cdot m/s = 10 kg \cdot m/s \,.$$

ii) Η ορμή του συστήματος, είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των δύο σωμάτων, όπου:



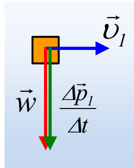
$$\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1 \text{ ή } p_1 = 10 kg \cdot m/s$$

$$\vec{p}_2 = M\vec{\upsilon}_2 \text{ ή } p_2 = 5 \cdot 4 kg \cdot m/s = 20 kg \cdot m/s$$

Αλλά τότε με βάση το διπλανό σχήμα:

$$p_{o\lambda} = p_1 + p_2 = 30 kg \cdot m/s$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος, είναι επίσης ίσος με το διανυσματικό άθροισμα των δύο ρυθμών μεταβολής της ορμής. Αλλά το σώμα Σ_2 κινείται με σταθερή ταχύτητα, συνεπώς $\Sigma F=0$ και η ορμή του δεν μεταβάλλεται, ενώ το σώμα Σ_1, δέχεται δύναμη, το βάρος, το οποίο του μεταβάλλει την ορμή. Έτσι:



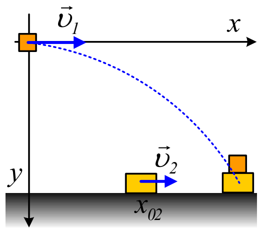
$$\frac{\Delta\vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{w} + 0 = \vec{w}$$

$$\frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t} = w = 1 \cdot 10 kg \cdot m/s^2 = 10 kg \cdot m/s^2 \,.$$

Με κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα κάτω, όπως στο σχήμα.

iii) Το σώμα Σ_1 εκτελεί οριζόντια βολή, η οποία μπορεί να θεωρηθεί μια σύνθετη κίνηση. Παίρνοντας λοιπόν το σύστημα αξόνων x και y, όπως στο παρακάτω σχήμα, έχουμε για την κίνησή του:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_{1x}=\upsilon_{o1}$ (1)	$\upsilon_{1y}=gt$ (3)
$x_1=\upsilon_{o1}t$ (2)	$y_1=½\, gt^2$ (4)



Αντίστοιχα η θέση του Σ_2 (στο ίδιο σύστημα αξόνων) είναι $x_2=x_{02}+\upsilon_2 t$ (5), όπου x_{02} η αρχική απόσταση του Σ_2 από την κατακόρυφη που περνά από το Ο.

Από την (4), τη στιγμή που το Σ_1 φτάνει στο έδαφος $y=H-\ell=10m-5m-5m$, οπότε:

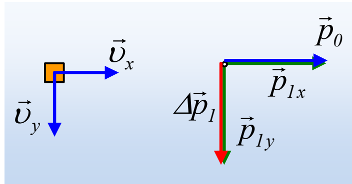
$$t_1 = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} s = 1s$$

Με αντικατάσταση στην (1) $x_1=\upsilon_{01}t_1=10m$.

Και με αντικατάσταση στην (5), λαμβάνοντας υπόψη ότι τη στιγμή της συνάντησης των δύο σωμάτων $x_1=x_2$, παίρνουμε:

$$x_{02}=x_2-\upsilon_2 t_1 = x_1-\upsilon_2 t_1 = 10m-4\cdot 1m=6m.$$

iv) Ελάχιστα πριν την κρούση το $Σ_1$ σώμα, έχει μια συνιστώσα ταχύτητα $υ_x=υ_1$ και μια $υ_y=gt_1=10m/s$, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε για την μεταβολή της ορμής του, μεταξύ των στιγμών t_0 και t_1 έχουμε:



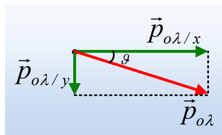
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 \quad \begin{cases} \Delta p_x = p_{1x} - p_{0x} = m\upsilon_1 - m\upsilon_1 = 0 \\ \Delta p_y = p_{1y} - p_{0y} = m\upsilon_y - 0 = 10kgm/s \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι η μεταβολή της ορμής του σώματος $Σ_1$ κατά τη διάρκεια της οριζόντιας βολής, είναι ένα διάνυσμα κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω και με μέτρο 10kg·m/s.

v) Η ορμή του συστήματος θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο ορμών:

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \begin{cases} p_{ολ/x} = p_{1x} + p_{2x} = m\upsilon_1 + M\upsilon_2 = 10kgm/s + 20kgm/s = 30kgm/s \\ p_{ολ/y} = p_{1y} + p_{2y} = m\upsilon_y + 0 = 10kgm/s \end{cases}$$

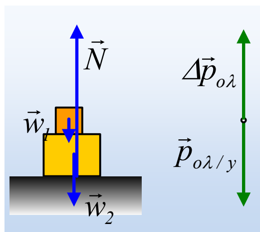
Οπότε και με βάση το διπλανό σχήμα:



$$p_{ολ} = \sqrt{p_{ολ/x}^2 + p_{ολ/y}^2} = \sqrt{30^2 + 10^2}\,kg\cdot m/s = 10\sqrt{10}\,kg\cdot m/s$$

$$\text{Και } εφ\vartheta = \frac{p_{ολ/y}}{p_{ολ/x}} = \frac{1}{3}$$

vi) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των σωμάτων $Σ_1$-$Σ_2$, έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα και είναι τα δυο βάρη και η αντίδραση N του επιπέδου. Αλλά τότε η ορμή δεν θα αλλάξει στην οριζόντια διεύθυνση x, ενώ θα μηδενιστεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, αφού η εκφώνηση μας λέει ότι το συσσωμάτωμα κινείται οριζόντια. Οπότε:



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ/y} - \vec{p}_{αρχ/y} \text{ ή } \Delta\vec{p} = 0 - \vec{p}_{αρχ/y} \text{ ή}$$

$$\Delta p = -p_{ολ/y} = -10kgm/s$$

Δηλαδή κατά τη διάρκεια της κρούσης έχουμε μεταβολή της συνολικής ορμής στην κατακόρυφη διεύθυνση, ενώ το διάνυσμα $\Delta\vec{p}$ έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο 10kgm/s.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης