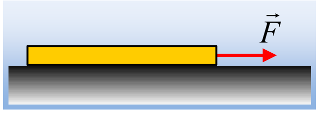
Ένα σύστημα που δεν είναι μονωμένο.

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα μάζας Μ και μήκους L. Σε μια στιγμή $t_0=0$ ασκούμε πάνω της μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=4N, με αποτέλεσμα να κινηθεί.



i) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σανίδας, καθώς και η ορμή της τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.

ii) Τη στιγμή t_1 αφήνουμε στο μέσον Μ της σανίδας, ένα σώμα Σ μάζας m, το οποίο παρουσιάζει τριβές με τη σανίδα, χωρίς ταχύτητα.

α) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα μετά τη στιγμή t_1. Να χαρακτηρίστε τις α-σκούμενες δυνάμεις σε εσωτερικές και εξωτερικές για το σύστημα σανίδα-σώμα Σ.

β) Το σύστημα σανίδα-σώμα Σ είναι ή όχι μονωμένο;

γ) Να γράψετε το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα. Μπορείτε να καταλήξετε και σε έ-ναν αντίστοιχο νόμο για το σύστημα σανίδα-σώμα Σ;

δ) Να υπολογιστεί η ορμή του συστήματος σανίδα -σώμα Σ τη χρονική στιγμή $t_2=3s$.

iii) Αν το σώμα Σ παύει να γλιστράει πάνω στη σανίδα τη χρονική στιγμή $t_3=4s$, όπου και σταματάμε να τραβάμε τη σανίδα, πόση είναι η τελική ορμή του συστήματος;

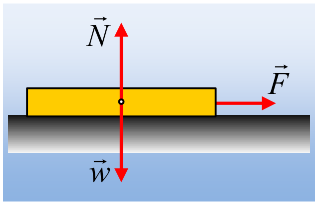
iv) Αν M=8kg, m=2kg, να βρεθεί ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ και σανίδας.

v) Ποιο το ελάχιστο μήκος της σανίδας L, ώστε να μην την εγκαταλείψει το σώμα Σ;

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Η σανίδα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, συνεπώς $\vec{N}+\vec{w}=0$, οπότε από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F} \rightarrow \frac{dP}{dt}=F=4\,kgm/s^2$$

Με κατεύθυνση ίδια με την δύναμη F.

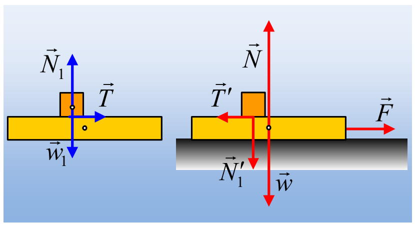
Αλλά η δύναμη είναι σταθερή και ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος και με το μέσο ρυθμό, οπότε και:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}=\vec{F} \rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta t}=F \rightarrow \frac{P_1-0}{t_1-t_0}=F \rightarrow$$

$$P_1=F\cdot t_1=4\cdot 2kgm/s=8kgm/s$$

ii) Μόλις αφήσουμε πάνω στη σανίδα το σώμα Σ, θα δεχτεί δύνα-μη τριβής με φορά προς τα δεξιά.

α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, φαίνονται στο διπλα-νό σχήμα, όπου N_1 η δύναμη που ασκείται από τη σανίδα στο



Σ και N_1' η αντίδρασή της. Από τις δυνάμεις αυτές:

Εξωτερικές δυνάμεις: F, w, w_1 και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N.

Εσωτερικές δυνάμεις: N_1, N_1', T και T΄.

β) Το σώμα Σ ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε $\vec{N}_1 + \vec{w}_1 = 0$ ή $N_1=w_1$. Αλλά και η σανίδα ισορροπεί στην ίδια διεύθυνση, οπότε $\vec{N} + \vec{w} + \vec{N}_1' = 0$ ή $N=w+N_1'=w+w_1$.

Έτσι στην κατακόρυφη διεύθυνση $\Sigma F_{y/\varepsilon\xi}=N-w-w_1=0$, ενώ στην οριζόντια $\Sigma F_{x/\varepsilon\xi}=F$, πράγμα που σημαίνει ότι το σύστημα των δύο σωμάτων **δεν** είναι μονωμένο.

γ) Ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\Sigma\vec{F}_{\sigma\alpha\nu} = \frac{d\vec{P}_{\sigma\alpha\nu}}{dt} \quad \text{και} \quad \Sigma\vec{F}_{\Sigma} = \frac{d\vec{P}_{\Sigma}}{dt} \rightarrow$$

$$\vec{F} + \vec{T}' + \left(\vec{w} + \vec{N} + \vec{N}_1\right) = \frac{d\vec{P}_{\sigma\alpha\nu}}{dt} \quad (1) \quad \text{και} \quad \vec{T} + \left(\vec{w}_1 + \vec{N}_1\right) = \frac{d\vec{P}_{\Sigma}}{dt} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των παραπάνω εξισώσεων κατά μέλη παίρνουμε:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{\sigma\alpha\nu}}{dt} + \frac{d\vec{P}_{\Sigma}}{dt} \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt}$$

Όπου $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα και $\frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt}$ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος.

δ) Αφού η εξωτερική δύναμη F παραμένει σταθερή έχουμε:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt} = \frac{\Delta\vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t}$$

Και παίρνοντας την δεξιά κατεύθυνση ως θετική:

$$F = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} \rightarrow$$

$$P_2 = F\left(t_2 - t_1\right) + P_1 = 4\left(3-2\right)kgm/s + 8kgm/s = 12kgm/s$$

iii) Αλλά και για το χρονικό διάστημα t_2-t_3 θα έχουμε:

$$F = \frac{P_3 - P_2}{t_3 - t_2} \rightarrow$$

$$P_3 = F\left(t_3 - t_2\right) + P_2 = 4\left(4-3\right)kgm/s + 12kgm/s = 16kgm/s$$

iv) Τη στιγμή t_1 η σανίδα έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = \frac{P_1}{M} = \frac{8}{8}m/s = 1m/s$, ενώ τη χρονική στιγμή t_3 το σώμα Σ σταματά να ολισθαίνει πάνω στη σανίδα, πράγμα που σημαίνει ότι τα δυο σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα υ_κ και $P_3 = (M+m)\upsilon_\kappa \rightarrow$

$$\upsilon_\kappa = \frac{P_3}{M+m} = \frac{16}{8+2}m/s = 1{,}6m/s$$

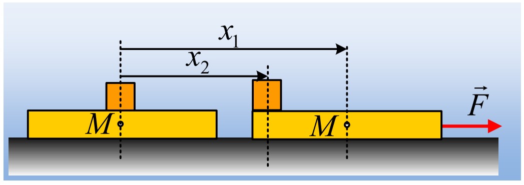
Εξάλλου για την ασκούμενη τριβή ολίσθησης έχουμε από την (2):

$$\vec{T}+\left(\vec{w}_1+\vec{N}_1\right)=\frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt}\rightarrow$$

$$T=\frac{P_\Sigma-0}{t_4-t_2}=\frac{m\upsilon_\kappa}{t_4-t_2}=\frac{2\cdot 1{,}6}{2}N=1{,}6N$$

$$T=\mu mg\rightarrow \mu=\frac{T}{mg}=\frac{1{,}6}{20}=0{,}08$$

Από τη στιγμή t_1=2s, μέχρι τη στιγμή t_3=4s που το σώμα Σ ολισθαίνει πάνω στη σανίδα, αυτή έχει μετατοπισθεί κατά x_1, όπου με χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε. για τη σανίδα παίρνουμε:



$$K_{1/3}-K_{1/1}=W_F+W_{T'}+W_w+W_N+W_{N1'}$$

Όπου $W_w=W_N=W_{N1}=0$, δυνάμεις κάθετες στην μετατόπιση, οπότε:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_\kappa^2-\frac{1}{2}M\upsilon_1^2=Fx_1-T'x_1\rightarrow$$

$$x_1=\frac{M\left(\upsilon_\kappa^2-\upsilon_1^2\right)}{2(F-T')}=\frac{8\left(1{,}6^2-1^2\right)}{2(4-1{,}6)}m=2{,}6m$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Σ και στο ίδιο διάστημα παίρνουμε:

$$K_{2/3}-K_{2/1}=W_T+W_{w1}+W_{N1}\text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\kappa^2-0=Tx_2\rightarrow$$

$$x_2=\frac{m\upsilon_\kappa^2}{2T}=\frac{2\cdot 1{,}6^2}{2\cdot 1{,}6}m=1{,}6m$$

Αλλά με βάση και το σχήμα, για να μην πέσει το σώμα Σ από τα σανίδα, θα πρέπει:

$$x_1-x_2\leq\frac{L}{2}\rightarrow$$

$$L\geq 2\left(x_1-x_2\right)\rightarrow L\geq 2\left(2{,}6m-1{,}6m\right)\text{ ή}$$

$$L\geq 2m$$

Σχόλιο:

Το τελευταίο ερώτημα θα μπορούσε να απαντηθεί με χρήση επιταχύνσεων και εξισώσεων κίνησης, αλλά παραπάνω προτιμήθηκε η χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης