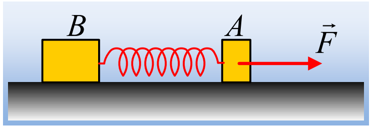
Μεταφορά ορμής και ενέργειας.



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα Α και Β με μάζες m=1kg και M=4kg αντίστοιχα, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο Α σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=4N, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μετά από λίγο, τη στιγμή $t_1=3s$, το σώμα Α έχει μετατοπισθεί κατά $x_1=5m$ και η δύναμη F σταματά να ασκείται.

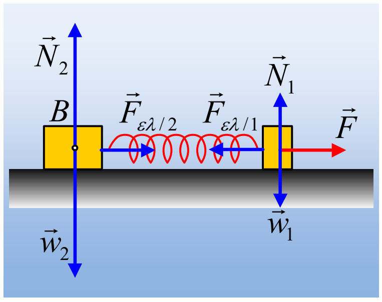
i) Να υπολογιστεί η ολική ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1.

ii) Αν τη στιγμή αυτή το σώμα Α έχει ταχύτητα προς τα δεξιά μέτρου $υ_1=2m/s$, τι ταχύτητα έχει το Β σώμα;

iii) Πόση ενέργεια μεταφέρεται στο σώμα Α μέσω του έργου της δύναμης F;

iv) Να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου την στιγμή που παύει να ασκείται η δύναμη F.

Απάντηση:



i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα μια τυχαία χρονική στιγμή μετά την εξάσκηση της δύναμης, φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου για **κάθε στιγμή** και για **κάθε σώμα** θα ισχύει ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα:

$$\Sigma\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

Όπου $\frac{d\vec{P}}{dt}$ ο **στιγμιαίος ρυθμός** μεταβολής της ορμής του σώματος.

Αλλά στην κατακόρυφη διεύθυνση τα σώματα ισορροπούν, οπότε $\vec{N}_1+\vec{w}_1=\vec{N}_2+\vec{w}_2=0$ και έτσι:

$$\vec{F}+\vec{F}_{ελ/1}=\frac{d\vec{P}_1}{dt} \quad \text{και} \quad \vec{F}_{ελ/2}=\frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

Όμως οι δυνάμεις του ελατηρίου είναι αντίθετες $\vec{F}_{ελ/1}=-\vec{F}_{ελ/2}$ και με πρόσθεση των δύο παραπάνω εξισώσεων κατά μέλη παίρνουμε:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}_1}{dt}+\frac{d\vec{P}_2}{dt} \text{ ή}$$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt}$$

Η τελευταία εξίσωση, δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα για ένα σύστημα σωμάτων, όπου F η (συνισταμένη) εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα.

Στο παράδειγμά μας η δύναμη F είναι σταθερή, οπότε ο παραπάνω ρυθμός παραμένει σταθερός και μπορούμε να γράψουμε, για όλο το χρονικό διάστημα άσκησης της δύναμης:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}_{ολ}}{\Delta t}\rightarrow F=\frac{P_{τελ}-P_{αρχ}}{t_1-0}\rightarrow F=\frac{P_{τελ}-0}{t_1}\rightarrow$$

$$P_{τελ}=F\cdot t_1=4\cdot 3\,kgm/s=12\,kgm/s$$

ii) Η παραπάνω ορμή του συστήματος είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των δύο σωμάτων (το ελατήριο θεωρείται αβαρές, χωρίς μάζα), οπότε:

$$\vec{P}_{τελ}=\vec{P}_1+\vec{P}_2\rightarrow$$

$$P_{τελ}=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2\rightarrow$$

$$\upsilon_2=\frac{P_{τελ}-m_1\upsilon_1}{m_2}=\frac{12-1\cdot 2}{4}m/s=2{,}5m/s$$

iii) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Α μέσω του έργου της δύναμης είναι:

$$W_F=F\cdot x_1=4\cdot 5J=20J$$

iv) Με βάση τη διατήρηση της ενέργειας, το παραπάνω έργο (η ενέργεια που δόθηκε στο σύστημα) θα είναι ίσο με την ενέργεια που **ΕΧΕΙ** το σύστημα. Αλλά η ενέργεια αυτή εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων και ως δυναμική ενέργεια του ελατηρίου:

$$W_F=K_1+K_2+U_{ελ}\rightarrow$$

$$U_{ελ}=W_F-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2=20J-\frac{1}{2}1\cdot 2^2J-\frac{1}{2}4\cdot 2{,}5^2J=5{,}5J$$

Σχόλια:

1) Όταν σε ένα σώμα ασκηθεί μια δύναμη, το αποτέλεσμα που θα επιφέρει μπορεί να προσεγγιστεί με δυο διαφορετικούς τρόπους:

A) Το γινόμενο F·Δx, είναι το γνωστό μας έργο, το οποίο μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται από αυτόν που ασκεί τη δύναμη, στο σώμα. Έτσι στο παραπάνω θέμα, μέσω του έργου της δύναμης, μεταφέρθηκε ενέργεια στο σώμα Α ίση με 20J.

B) Το γινόμενο F·Δt ο οποίο ονομάζεται ώθηση της δύναμης (ωθώ = σπρώχνω), διανυσματικό μέγεθος, το οποίο μετράει την ορμή που μεταφέρεται στο σώμα. Στην περίπτωσή μας, η ώθηση της δύναμης ήταν 12N·s, πράγμα που σημαίνει ότι μεταφέρθηκε ορμή στο σύστημα ίση με 12kgm/s.

2) Ας εστιάσουμε τώρα στα επιμέρους σώματα του συστήματος.

i) Στο Α σώμα ασκείται η δύναμη F μέσω της οποίας αυξάνεται η ορμή κατά 12kgm/s, αλλά και η δύναμη $F_{ελ/1}$ με αντίθετη κατεύθυνση, η οποία τείνει να μειώσει την ορμή. Αλλά αυτή η μείωση, εμφανίζεται μέσω της ώθησης της $F_{ελ/2}$ και αυξάνει την ορμή του Β σώματος. Οι δυο ωθήσεις (της $F_{ελ/1}$ και $F_{ελ/2}$) είναι αντίθετες, αφού οι δυνάμεις είναι αντίθετες και προφανώς το χρονικό διάστημα εξάσκησής τους είναι το ίδιο.

Έτσι το Α σώμα έχει ορμή $P_1=m_1\upsilon_1=2kgm/s$, ενώ το Β $P_2=m_2\upsilon_2=4\cdot 2{,}5kgm/s=10\ kgm/s$ που το άθροισμά τους μας δίνει τα *12 kgm/s* όπου είναι η ορμή που μεταφέρθηκε στο σύστημα, λόγω δράσης της δύναμης F.

ii) Στο A σώμα μεταφέρθηκε ενέργεια, ίση με το έργο της δύναμης F, δηλαδή 20J. Αλλά ασκείται πάνω του η $F_{ελ/1}$ η οποία του αφαιρεί ενέργεια. Πόση;

Αν πάρουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το A σώμα θα πάρουμε:

$$K_{1/τ}-K_{1/α}=W_F+W_{Fελ/1} \rightarrow$$

$$W_{Fελ/1}=K_{1/τ}-0-W_F=\frac{1}{2}m_1 υ_1^2-W_F=\frac{1}{2}1\cdot 2^2 J-20J=-18J$$

Ένα μέρος από την ενέργεια που αφαιρείται από το A σώμα, από το ελατήριο, μεταφέρεται στο σώμα B. Με την ίδια λογική, βρίσκουμε:

$$K_{2/τ}-K_{2/α}=W_{Fελ/2} \rightarrow$$

$$W_{Fελ/2}=K_{2/τ}-0=\frac{1}{2}m_2 υ_2^2=\frac{1}{2}4\cdot 2{,}5^2 J=12{,}5J$$

Αλλά τότε στο ελατήριο έχει παραμείνει ενέργεια $18J-12{,}5J=5{,}5J$ και αυτή είναι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, μιας και η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική δύναμη και το έργο της συνδέεται με μεταβολές της δυναμικής του ενέργειας.

Αξίζει να τονισθεί ότι τα έργα των δυνάμεων που ασκεί το ελατήριο στα σώματα, δεν είναι αντίθετα, αφού οι μετατοπίσεις των δύο σωμάτων είναι διαφορετικές. Σε αντίθεση με τις αντίστοιχες ωθήσεις που είναι αντίθετες, αφού ασκούνται για το ίδιο χρονικό διάστημα.

3) Μετά την κατάργηση της ασκούμενης δύναμης F, έχουμε πια ένα σύστημα σωμάτων που είναι μονωμένο, οπότε δεν μεταφέρεται ούτε ενέργεια ούτε ορμή σε αυτό, συνεπώς θα έχουμε αφενός διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, αφετέρου διατήρηση της ορμής.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης