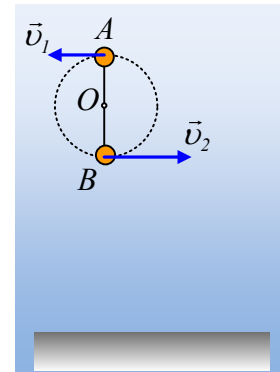


### Η κυκλική κίνηση, η οριζόντια βολή και η ορμή.

Ένα σώμα μάζας 0,5kg είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους 0,5m και διαγράφει κατακόρυφη κυκλική τροχιά κέντρου Ο. Τη στιγμή που βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του Α, έχει ταχύτητα  $v_1=4\text{m/s}$ , όπως στο σχήμα.



- i) Να βρεθεί η ορμή του σώματος και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του στη θέση Α.
- ii) Να υπολογιστεί επίσης η ορμή του σώματος στο κατώτερο σημείο της τροχιάς Β.
- iii) Να υπολογιστούν μεταξύ των θέσεων Α και Β:
  - α) Η μεταβολή της ορμής του σώματος.
  - β) Η μεταβολή του μέτρου της ορμής.
- iv) Τη στιγμή που φτάνει το σώμα στη θέση Β, το νήμα κόβεται. Μετά από χρονικό διάστημα  $t_1=0,6\text{s}$  το σώμα βρίσκεται στο σημείο Γ, χωρίς να έχει φτάσει στο έδαφος.
  - α) Να υπολογιστεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος, στη θέση Γ.
  - β) Ποια η μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων Β και Γ;

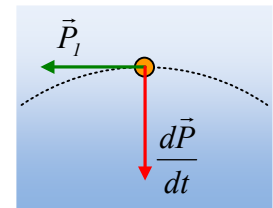
#### Απάντηση:

- i) Η ορμή του σώματος είναι ένα διάνυσμα, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα  $v_1$  και μέτρο:

$$P_1 = m v_1 = 0,5 \cdot 4 \text{kgm/s} = 2 \text{kgm/s}$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής, η συνισταμένη δύναμη, θα είναι διάνυσμα κάθετο στην ταχύτητα με φορά προς το κέντρο Ο του κύκλου και μέτρο:

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = m \frac{v_1^2}{R} = 0,5 \frac{4^2}{0,5} \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 16 \text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$



- ii) Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση Β, ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, μια συντηρητική δύναμη.

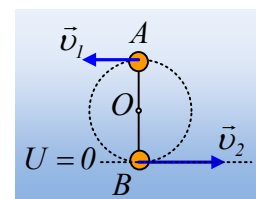
$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g \cdot 2R = \frac{1}{2} m v_2^2 + 0 \rightarrow$$

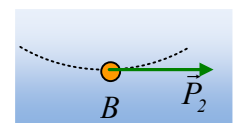
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4gR} = \sqrt{4^2 + 4 \cdot 10 \cdot 0,5} \text{m/s} = 6 \text{m/s}$$

Οπότε το σώμα στη θέση Β, έχει ορμή οριζόντια με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$P_2 = m v_2 = 0,5 \cdot 6 \text{kgm/s} = 3 \text{kgm/s}$$

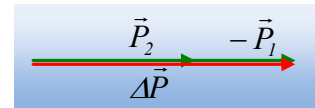


- iii) α) Η μεταβολή της ορμής του σώματος μεταξύ των θέσεων Α και Β είναι:



$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 + (-\vec{P}_1)$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα παραπάνω διανύσματα, οπότε το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής, είναι ένα διάνυσμα οριζόντιο, με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:



$$\Delta P = P_2 + P_1 = 3\text{kgm/s} + 2\text{kgm/s} = 5\text{kgm/s}$$

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με αλγεβρικές τιμές, αφού τα δυο διανύσματα είναι οριζόντια (έχουν την ίδια διεύθυνση) και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, παίρνουμε:

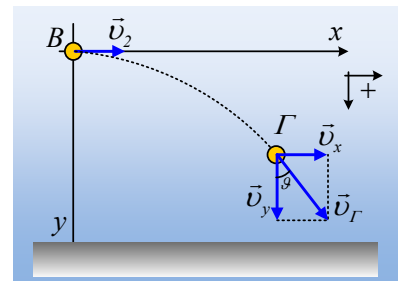
$$\Delta P = P_2 - P_1 = +3\text{kgm/s} - (-2\text{kgm/s}) = +5\text{kgm/s}.$$

Όπου το αποτέλεσμα που βρήκαμε σημαίνει ότι το διάνυσμα έχει φορά προς τα δεξιά και μέτρο 5kgm/s.

β) Η μεταβολή του μέτρου της ορμής είναι:

$$\Delta |P| = |P_2| - |P_1| = 3\text{kgm/s} - 2\text{kgm/s} = 1\text{kgm/s}.$$

iv) Μόλις κοπεί το νήμα, το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή, για την οποία παίρνουμε το σύστημα των αξόνων x και y, όπως στο σχήμα. Θεωρώντας την κίνηση ως επαλληλία μιας ευθύγραμμης ομαλής στην οριζόντια διεύθυνση και μιας ελεύθερης πτώσης στην κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε:



Αξονας x	Αξονας y
$v_x = v_2$ (1)	$v_y = gt$ (3)
$x = v_2 t$ (2)	$y = \frac{1}{2} g t^2$ (4)

Έτσι στη θέση Γ, από την (3) παίρνουμε  $v_y = gt = 10 \cdot 0,6 \text{m/s} = 6 \text{m/s}$ .

Αλλά τότε η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο:

$$v_\Gamma = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} \text{m/s} = 6\sqrt{2} \text{m/s}$$

Σχηματίζοντας με την κατακόρυφη διεύθυνση γωνία θ, όπου

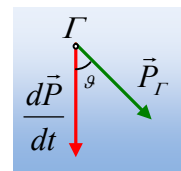
$$\epsilon\phi\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{ή} \quad \theta = 45^\circ$$

Αλλά τότε και η ορμή του σώματος έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα και μέτρο:

$$P_\Gamma = m v_\Gamma = 0,5 \cdot 6\sqrt{2} \text{kgm/s} = 3\sqrt{2} \text{kgm/s}$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής, είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη, άρα με διεύθυνση κατακόρυφη, φορά προς τα κάτω και μέτρο:

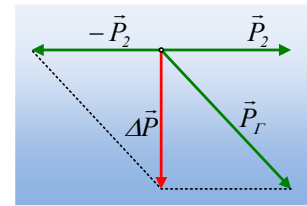
$$\frac{dP_\Gamma}{dt} = \Sigma F = mg = 0,5 \cdot 10 \text{kg} \cdot \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 5 \text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$



β) Για τη μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων Β και Γ, έχουμε:

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_\Gamma - \vec{P}_2 = \vec{P}_\Gamma + (-\vec{P}_2)$$

Οπότε δεν μένει τίποτα άλλο παρά να συνθέσουμε τα διανύσματα  $\vec{P}_\Gamma$  και  $-\vec{P}_2$  με τη βοήθεια και του διπλανού σχήματος.



**Αλλά...**

Αλλά ο δρόμος αυτός είναι συνήθως δύσβατος...

Ας χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τους άξονες x και y, αφού έτσι μπορούμε ευκολότερα να χειριστούμε τα διανύσματα. Βρίσκουμε λοιπόν τις μεταβολές της ορμής σε κάθε άξονα:

$$\Delta P_x = P_{\Gamma x} - P_{2x} = m v_x - m v_x = 0 \text{ και}$$

$$\Delta P_y = P_{\Gamma y} - P_{2y} = m v_y - 0 = 0,5 \cdot 6 \text{ kgm/s} = 3 \text{ kgm/s}$$

Αλλά, αφού δεν έχουμε μεταβολή της ορμής στην διεύθυνση x, η μόνη μεταβολή που μένει, είναι αυτή στην κατακόρυφη διεύθυνση, με φορά προς τα κάτω και μέτρο 3kgm/s.

Το ότι θα είχαμε μεταβολή της ορμής του σώματος κατακόρυφη, θα έπρεπε να το περιμένουμε!!

Γιατί;

Γιατί η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα, είναι το βάρος το οποίο μεταβάλλει την ορμή στην κατακόρυφη διεύθυνση. Άλλωστε, ας μην ξεχνάμε ότι η κίνηση στον άξονα x είναι ευθύγραμμη ομαλή, συνεπώς αφού η ταχύτητα παραμένει σταθερή και η ορμή, θα παραμένει σταθερή.

### Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης