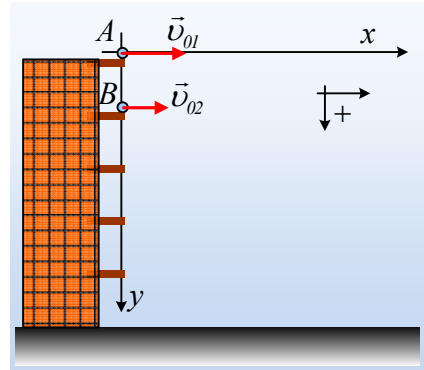


Δύο βολές στο ίδιο σύστημα αξόνων.

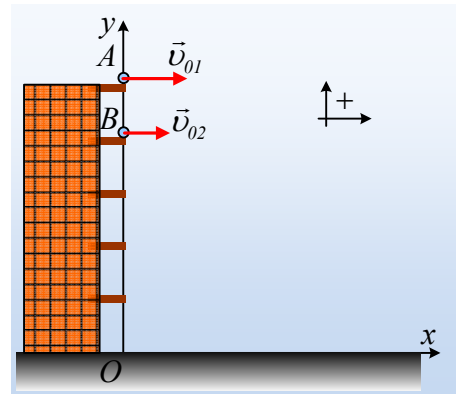
Από δύο σημεία, τα οποία απέχουν κατακόρυφα $h=3\text{m}$, εκτοξεύονται ταυτόχρονα τη στιγμή $t=0$, οριζόντια δυο μικρές σφαίρες A και B, στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Η πρώτη, με αρχική ταχύτητα $v_{01}=10\text{m/s}$ και η δεύτερη με $v_{02}=6\text{m/s}$.

Θέλοντας να μελετήσουμε τις κινήσεις τους, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων, με αρχή την αρχική θέση της A σφαίρας, όπως στο σχήμα.



- i) Με βάση το σύστημα αυτό των αξόνων, να γράψετε τις εξισώσεις για τις ταχύτητες $v_x=v(t)$, $v_y=v(t)$ και τις θέσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$ των δύο σφαιρών, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- ii) Ποια χρονική στιγμή η απόσταση των δύο σφαιρών είναι $d=5\text{m}$;
- iii) Το αρχικό ύψος από το έδαφος, από το οποίο εκτοξεύθηκε η B σφαίρα είναι $H=20\text{m}$. Να βρεθεί η ταχύτητα της A σφαίρας, τη στιγμή που η B σφαίρα φτάνει στο έδαφος. Πόσο απέχουν τη στιγμή αυτή οι δυο σφαίρες;
- iv) Να απαντήσετε ξανά στο i) ερώτημα, αν το σύστημα αξόνων x,y είναι όπως στο δεύτερο σχήμα, με κορυφή το σημείο O του εδάφους.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Απάντηση:

- i) Με βάση το σύστημα αξόνων x,y η A σφαίρα ξεκινά την κίνησή του από τη θέση $(x,y)=(0,0)$, ενώ η B, από τη θέση $(x,y)=(0,h)$, πράγμα που σημαίνει ότι η αρχική του θέση στην διεύθυνση y , είναι η $y_0=3\text{m}$. Έτσι όταν η B σφαίρα μετατοπισθεί κατά $\Delta y=y_2-y_0$, θα βρίσκεται στη θέση $y_2=y_0+\Delta y$. Αλλά τότε θεωρώντας τις δυο κινήσεις σύνθετες, αποτελούμενες από μια ευθύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη, έχουμε τις εξισώσεις:

Σφαίρα A		Σφαίρα B	
Άξονας x	Άξονας y	Άξονας x	Άξονας y
$v_{1x}=v_{01}$ (1)	$v_{1y}=gt$ (3)	$v_{2x}=v_{02}$ (5)	$v_{2y}=gt$ (7)
$x_1=v_{01}t$ (2)	$y_1=\frac{1}{2}gt^2$ (4)	$x_2=v_{02}t$ (6)	$y_2=h+\frac{1}{2}gt^2$ (8)

- ii) Έστω ότι κάποια στιγμή οι σφαίρες βρίσκονται στις θέσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, απέχοντας κατά $(\Gamma\Delta)=d$. Στις θέσεις αυτές, η οριζόντια απόστασή τους $(E\Gamma)=x_1-x_2$, ενώ απέχουν κατακόρυφα κατά $(E\Delta)=y_2-y_1$. Αλλά τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Gamma\Delta$ παίρνουμε:

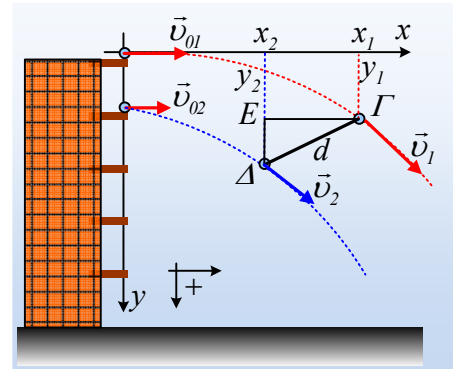
$$(\Gamma\Delta)^2 = (E\Delta)^2 + (E\Gamma)^2$$

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (v_{01}t - v_{02}t)^2 + \left(h + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 \right)^2 \rightarrow$$

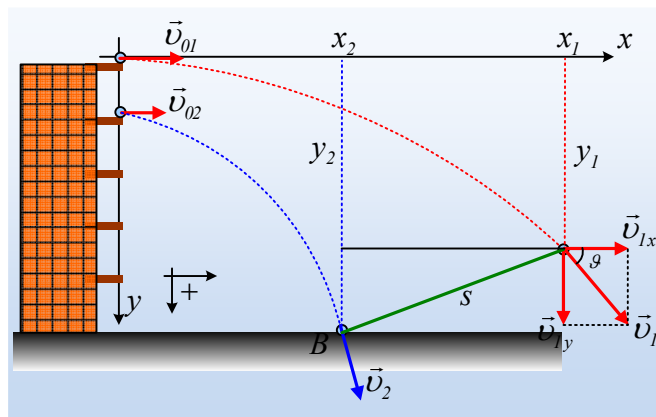
$$d^2 = (v_{01} - v_{02})^2 t^2 + h^2 \quad (\alpha)$$

$$t = \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{v_{01} - v_{02}} = \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{10 - 6} s = \frac{\sqrt{16}}{4} s = 1s$$



iii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (8) $y=H+h=23m$ βρίσκουμε:

$$23=3+ \frac{1}{2} 10 \cdot t^2 \rightarrow t=2s.$$



Η Α σφαίρα τη στιγμή αυτή, με βάση τις εξισώσεις (1) και (3) έχει οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας $v_{1x}=10m/s$ και κατακόρυφη $v_{1y}=gt=20m/s$. Έτσι η ταχύτητά της έχει μέτρο:

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} m/s = 10\sqrt{5} m/s$$

Ενώ σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ , για την οποία:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{20}{10} = 2$$

Εξάλλου από την σχέση (α) για την απόσταση των δύο σφαιρών, έχουμε:

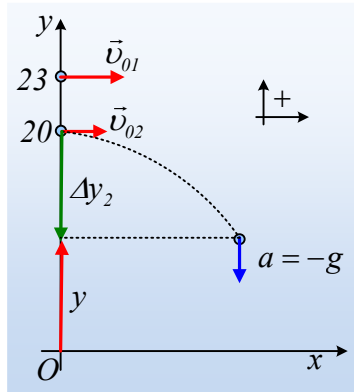
$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 \rightarrow$$

$$s^2 = (v_{01}t - v_{02}t)^2 + \left(\left(h + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 \right) \right)^2 \rightarrow$$

$$s^2 = (v_{01} - v_{02})^2 t^2 + h^2 \quad \acute{\eta}$$

$$s = \sqrt{(v_{01} - v_{02})^2 t^2 + h^2} = \sqrt{(10 - 6)^2 \cdot 2^2 + 3^2} m = \sqrt{64 + 9} m = \sqrt{73} m \approx 8,5m$$

iv) Η σφαίρα Α εκτοξεύθηκε από ύψος $h'=H+h=23m$ και με βάση το νέο σύστημα αξόνων x,y ξεκινά την κίνησή της από τη θέση $(x_0,y_0)=(0,23m)$, ενώ η Β, από τη θέση $(x_0,y_0)=(0,20m)$. Έτσι όταν μια σφαίρα μετατοπισθεί κατά $\Delta y=y-y_0$, θα βρίσκεται στη θέση $y=y_0+\Delta y$.



Εξάλλου επειδή η κατεύθυνση προς τα πάνω θεωρείται θετική, η επιτάχυνση είναι $a=-g$. Θεωρώντας δε τις δυο κινήσεις σύνθετες, αποτελούμενες από μια ευθύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη, έχουμε τις εξισώσεις:

Σφαίρα Α	
Άξονας x	Άξονας y
$v_{1x}=v_{01}$ (1)	$v_{1y}=-gt$ (3)
$x_1=v_{01}t$ (2)	$y_1=y_{01}-\frac{1}{2}gt^2$ (4)

Σφαίρα Β	
Άξονας x	Άξονας y
$v_{2x}=v_{02}$ (5)	$v_{2y}=-gt$ (7)
$x_2=v_{02}t$ (6)	$y_2=y_{02}-\frac{1}{2}gt^2$ (8)

Όπου $y_{01}=23\text{m}$ και $y_{02}=20\text{m}$ οι θέσεις των δύο σφαιρών τη στιγμή της εκτόξευσης.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης