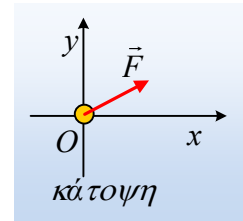


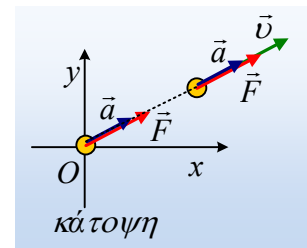
Μια μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση. Φ.Ε.

A) Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή ασκείται πάνω του μια οριζόντια σταθερή δύναμη \vec{F} , όπως στο σχήμα.

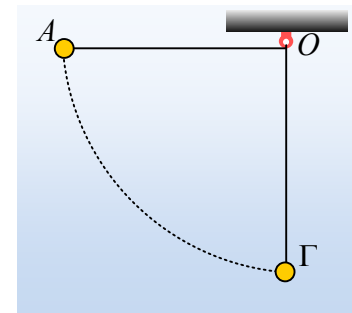


- i) Σε ποια διεύθυνση θα κινηθεί το σώμα;
- ii) Η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα θα μεταβάλλει:
 - α) Μόνο το μέτρο της ταχύτητας.
 - β) Μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας.
 - γ) Και το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας.

- i) Με βάση το 2^ο νόμο του Νεύτωνα $\vec{F} = m\vec{a}$ το σώμα θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση ίδιας διεύθυνσης με τη δύναμη. Αλλά τότε το σώμα θα αποκτήσει και ταχύτητα στην ίδια διεύθυνση και θα κινηθεί ευθύγραμμα με ταχύτητα το μέτρο της οποίας θα υπακούει στην εξίσωση $v = a \cdot t$.
- ii) Από τη στιγμή που η επιτάχυνση και η ταχύτητα, την οποία θα αποκτήσει το σώμα, θα έχουν την ίδια κατεύθυνση, θα αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας, αλλά όχι η κατεύθυνσή της. Σωστό το α).



B) Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί στο κάτω άκρο νήματος μήκους $L=2m$, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο O. Εκτρέπουμε το σώμα ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο, όπως στο σχήμα (θέση A), και το αφήνουμε να κινηθεί. Δίνεται $g=10m/s^2$.



- 1) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, αμέσως μόλις αφήθει να κινηθεί, στη θέση A και να υπολογιστούν τα μέτρα τους.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, είναι το βάρος και η τάση του νήματος, όπως εμφανίζονται στο διπλανό σχήμα. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$w = mg = 2 \cdot 10N = 20N \text{ και } T = m \frac{v^2}{R} = 0$$

όπου η τάση του νήματος παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, αφού είναι η μοναδική δύναμη που έχει τη διεύθυνση της ακτίνας, της κυκλικής τροχιάς που θα διαγράψει το σώμα. Αλλά τη στιγμή που αφήνεται η ταχύτητα είναι μηδενική συνεπώς και το μέτρο της τάσης είναι επίσης μηδενικό.

Συμπέρασμα; Στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος $w!!!$

- 2) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα στη θέση A. Η επιτάχυνση αυτή θα μεταβάλλει:

- α) Μόνο το μέτρο της ταχύτητας.
- β) Μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας.
- γ) Και το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας.

Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε:

$$\Sigma F=ma \rightarrow mg=ma \rightarrow a=g=10m/s^2.$$

Κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, ίδια με το βάρος.

Η επιτάχυνση αυτή έχει διεύθυνση εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, συνεπώς ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι θα μεταβάλλει μόνο το μέτρο της ταχύτητας. Σωστό το α).

3) Μετά από λίγο το σώμα φτάνει στην αρχική θέση ισορροπίας του (θέση Γ με κατακόρυφο νήμα), με ταχύτητα μέτρου v_1 . Να την σχεδιάσετε στο σχήμα. Το μέτρο της μπορούμε να το υπολογίσουμε:

- i) Χρησιμοποιώντας τους τύπους της ομαλής κυκλικής κίνησης.
- ii) Ενεργειακά, δηλαδή με χρήση του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας ή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Η ταχύτητα v_1 στη θέση Γ είναι οριζόντια, εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά που διαγράφει το σώμα.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο της θα πρέπει να δουλέψουμε ενεργειακά, είτε με χρήση του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας είτε εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Οι εξισώσεις κίνησης για την ομαλή κυκλική κίνηση, δεν μπορούν να εφαρμοστούν, αφού η κίνηση δεν είναι ομαλή κυκλική. Το σώμα δεν κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου.

4) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας v_1 στη θέση Γ.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος η μηχανική ενέργεια διατηρείται, αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, ενώ η τάση του νήματος δεν παράγει έργο, αφού είναι διαρκώς κάθετη στη μετατόπιση. Συνεπώς, ορίζοντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κατώτερο σημείο της τροχιάς Γ, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, έχουμε:

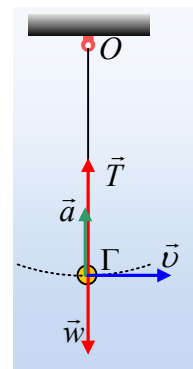
$$\begin{aligned} K_A + U_A &= K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \\ 0 + mgL &= \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gL} \rightarrow \\ v_1 &= \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25} m/s = 5 m/s \end{aligned}$$

5) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Γ. Η επιτάχυνση αυτή θα μεταβάλλει:

- α) Μόνο το μέτρο της ταχύτητας.
- β) Μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας.
- γ) Και το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας.

Η επιτάχυνση στη θέση αυτή είναι κεντρομόλος με κατεύθυνση προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς και μέτρο:

$$a = a_\kappa = \frac{v_1^2}{R} = \frac{5^2}{1,25} m/s^2 = 20 m/s^2$$



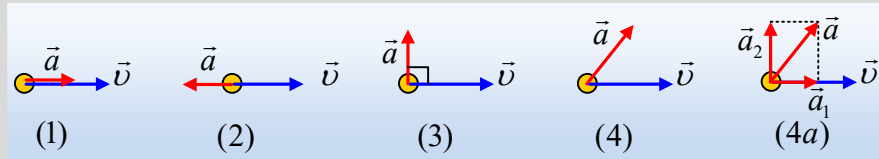
Η επιτάχυνση αυτή είναι κάθετη στην ταχύτητα και μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της.

Συμπέρασμα:

Η επιτάχυνση ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Αν η επιτάχυνση έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα, τότε μεταβάλλει μόνο το μέτρο της ταχύτητας. Έτσι στο σχήμα (1) το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται, ενώ στο σχήμα (2) μειώνεται.



- Αν η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, σχήμα (3), τότε μεταβάλλεται μόνο η διεύθυνση της ταχύτητας, αλλά όχι το μέτρο της.
- Τέλος, αν το διάνυσμα της επιτάχυνσης σχηματίζει κάποια άλλη γωνία με το διάνυσμα της ταχύτητας, σχήμα (4), θα προκαλεί μεταβολή ΚΑΙ στο μέτρο ΚΑΙ στη διεύθυνση της ταχύτητας. Στο σχήμα (4^α) εύκολα μπορείτε να δείτε ότι στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, όπου η συνιστώσα a_1 μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας, ενώ η συνιστώσα a_2 την διεύθυνσή της.

6) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος στη θέση Γ.

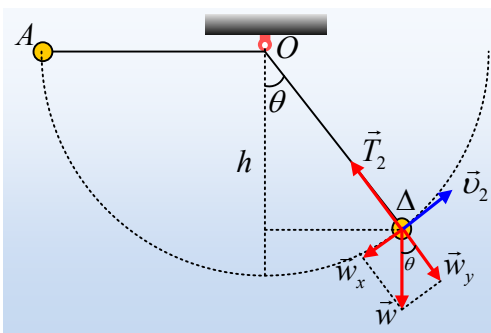
Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα (θεμελιώδη νόμο της δυναμικής) παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow$$

$$T - w = m \cdot a_c \rightarrow T = mg + m a_c = 2 \cdot 10N + 2 \cdot 20N = 60N.$$

7) Στη συνέχεια το σώμα φτάνει σε μια θέση Δ, όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8. Για τη θέση αυτή να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του σώματος v_2 .



Ορίζοντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της τροχιάς Δ, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2} m v_2^2 + 0 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

Αλλά από το σχηματιζόμενο τρίγωνο με κάθετη πλευρά h και υποτείνουσα L έχουμε:

$$\text{συν}\theta = \frac{h}{L} \rightarrow h = L \cdot \text{συν}\theta \text{ οπότε:}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL \cdot \sigma \nu \nu \vartheta} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25 \cdot 0,8} m/s = 2\sqrt{5} m/s$$

ii) Η κεντρομόλος επιτάχυνση:

$$a_k = \frac{v_2^2}{R} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{1,25} m/s^2 = 16 m/s^2.$$

Με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς O.

iii) Πάρτε δύο κάθετους άξονες, ο ένας στη διεύθυνση της ακτίνας και ο άλλος στη διεύθυνση της εφαπτόμενης στη θέση Δ. Αναλύστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα πάνω στους άξονες αυτούς και στη συνέχεια:

α) Υπολογίστε την επιτάχυνση στη διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου. Τι μετράει η επιτάχυνση αυτή;

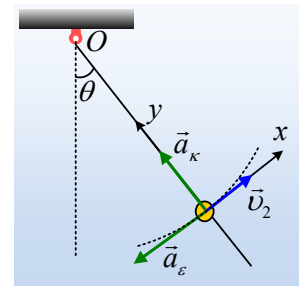
β) Υπολογίστε το μέτρο της τάσης T_2 του νήματος.

Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί το βάρος και η τάση του νήματος T_2 που ασκούνται στο σώμα. Αναλύουμε το βάρος σε δυο συνιστώσες

$$w_x = mg \cdot \eta \mu \theta = 2 \cdot 10 \cdot 0,6 N = 12 N \text{ και } w_y = mg \cdot \sigma \nu \nu \theta = 2 \cdot 10 \cdot 0,8 N = 16 N.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το 2^ο νόμο του Νεύτωνα στους δυο άξονες έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_x \rightarrow w_x = m \cdot a_x \rightarrow a_x = \frac{w_x}{m} = \frac{12}{2} = 6 m/s^2,$$



Με διεύθυνση τη διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου, ίδια με τη διεύθυνση της ταχύτητας, αλλά με αντίθετη από τη φορά της ταχύτητας. Συνεπώς η επιτάχυνση αυτή μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας. Στην περίπτωση μας δε, επειδή έχει αντίθετη φορά, το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται (επιβραδυνόμενη κίνηση)

Η συνιστώσα αυτή της επιτάχυνσης, ονομάζεται **επιτρόχια επιτάχυνση** (a_e) και ισούται με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σώματος.

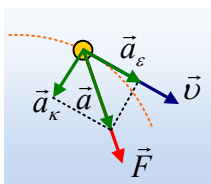
β) Στη διεύθυνση της ακτίνας:

$$\Sigma F_y = m \cdot a_y \rightarrow T_2 - w_y = m \cdot a_y$$

Όπου $a_y = a_k$ η γνωστή μας κεντρομόλος επιτάχυνση. Έτσι:

$$T_2 = w_y + m \cdot a_k = 16 N + 2 \cdot 16 N = 48 N$$

Συμπέρασμα:



Σε κάθε καμπυλόγραμμη κίνηση, η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά σε κάθε σημείο (σκεφτείτε οριζόντια βολή ή κυκλική κίνηση). Η επιτάχυνση όμως έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης και κατευθύνεται πάντα προς το εσωτερικό μέρος της τροχιάς. Η επιτάχυνση αυτή, μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες. Μία, στη διεύθυνση της ταχύτητας, η οποία ονομάζεται **επιτρόχια επιτάχυνση** και η ο-

ποία ευθύνεται για την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας και μία κάθετη στην ταχύτητα, η οποία ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση**, η οποία προκαλεί μεταβολή στην διεύθυνση της ταχύτητας.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης